Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

Unternehmensbewertung und Steuern

Konstante Wachstumsrate und Kapitalkosten

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

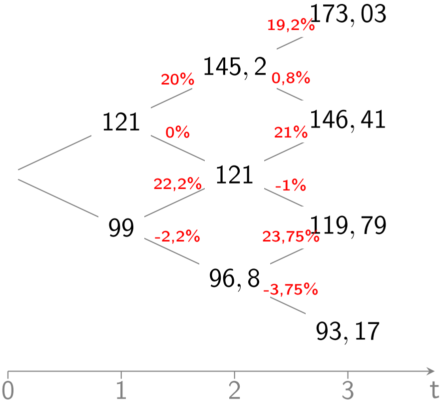
Freie Universität Berlin

Konstante Wachtumsrate der Cashflows ◁ 1 ▷

Was genau bedeutet

$$\mathsf{E}[\widetilde{CF}_t | \mathcal{F}_s] = (1 + 10\%)^{t-s} \widetilde{CF}_s?$$

Dazu betrachten wir erneut den Binomialbaum



und fragen nach den Wachstumsraten für jede Bewegung.

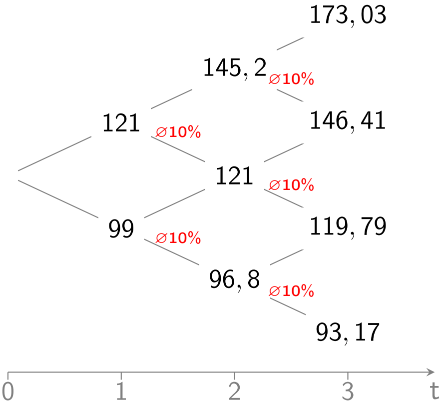
Konstante Wachtumsrate der Cashflows

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Was genau bedeutet

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_t | \mathcal{F}_s] = (1 + 10\%)^{t-s}\widetilde{CF}_s?$$

Dazu betrachten wir erneut den Binomialbaum



ergibt durchschnittliche konstante Wachstumsrate pro Knoten.

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

Annahme (konstante erwartete Wachstumsrate)

Für die Cashflows $\widetilde{CF}_t$ und alle Zeitpunkte $s \leq t$ ist die erwartete Wachstumsrate in jedem Knoten gleich g,[1]

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_t | \mathcal{F}_s] = (1+g)^{t-s} \widetilde{CF}_s \, . \tag{1}$$

g ist dabei beliebig, aber heute bereits sicher.

Wenn die Cashflows unendlich lange fließen, spricht man auch von einer "ewigen Rente".

[1] Auch: Cashflows sind "autoregressiv".

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

$\widetilde{V}_t$ ist der (unsichere) Marktwert eines Unternehmens im Zeitpunkt t.

Definition (Kapitalkosten)

Kapitalkosten k eines Unternehmens im Zeitpunkt t sind (bedingte) erwartete Renditen

$$k_t = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} - 1.$$

Achtung: Bedingte erwartete Rendite!

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Beispiel. Von $t = 2$ nach $t = 3$ haben wir eine Rendite von

$$\frac{\widetilde{V}_3 + \widetilde{CF}_3}{\widetilde{V}_2} - 1.$$

Der bedingte Erwartungswert dieser Größe sind die Kapitalkosten.

Anmerkung: Alle anderen Definitionen haben sich als unzweckmäßig erwiesen. Man muss den bedingten Erwartungswert verwenden!

Annahme nötig!

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

Bedingte erwartete Renditen sind unsicher. Damit werden wir nicht rechnen können. Also benötigen wir eine Annahme.

Annahme (sichere Kapitalkosten)

Die Kapitalkosten k_t sind bereits heute sicher und seien (der Einfachheit halber) konstant. Wir nehmen weiter an, dass die Kapitalkosten k größer als die Wachstumsrate g sind.

Ein Unternehmen sei eigen- und fremdfinanziert.[2]

Wir werden im Folgenden zwei Kapitalkosten betrachten:

Eigenkapitalkosten Sind typischerweise größer als der risikolose Zins

$$k^E = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^E_{t+1} + \widetilde{CF}^E_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}^E_t} - 1.$$

Fremdkapitalkosten Sind gleich dem risikolosen Zins

$$r_f = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^F_{t+1} + \widetilde{CF}^F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}^F_t} - 1.$$

[2] Kein Insolvenzrisiko.

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

Es gilt

Satz (Gewichtete Kapitalkosten)

Die (Gesamt)Kapitalkosten eines Unternehmens sind der mit den Fremd- und Eigenkapitalquoten gewichtete Durchschnitt der jeweiligen Kapitalkosten, also

$$k = k^E \cdot (1 - l) + r_f \cdot l.$$

Gewichtungsfaktor ist die Fremdkapitalquote $l = \frac{\widetilde{V}_t^F}{\widetilde{V}_t}$.

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Ist “trivial”:

$$\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\widetilde{V}^E_{t+1} + \widetilde{CF}^E_{t+1} | \mathcal{F}_t] + \mathrm{E}[\widetilde{V}^F_{t+1} + \widetilde{CF}^F_{t+1} | \mathcal{F}_t]$$

$$\frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^E_{t+1} + \widetilde{CF}^E_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^F_{t+1} + \widetilde{CF}^F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t}$$

$$\frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^E_{t+1} + \widetilde{CF}^E_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}^E_t} \cdot \frac{\widetilde{V}^E_t}{\widetilde{V}_t} + \\ + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}^F_{t+1} + \widetilde{CF}^F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}^F_t} \cdot \frac{\widetilde{V}^F_t}{\widetilde{V}_t}$$

$$k + 1 = (k^E + 1) \cdot \frac{\widetilde{V}^E_t}{\widetilde{V}_t} + (r_f + 1) \cdot \frac{\widetilde{V}^F_t}{\widetilde{V}_t}$$

$$k = k^E \cdot (1 - l) + r_f \cdot l$$

Endlich: Unsere Arbitragebeziehung

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

$$\underbrace{(1+k)\widetilde{V}_t}_{\text{(riskante) Kapitalmarktanlage}} = \underbrace{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}_{\text{(riskante) Realinvestition}}$$

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

$$\underbrace{(1+k)\widetilde{V}_t}_{\text{(riskante) Kapitalmarktanlage}} = \underbrace{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}_{\text{(riskante) Realinvestition}}$$

Diese Arbitragebeziehung ergibt sich unmittelbar aus der Kapitalkostendefinition

$$k = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} - 1$$

Rekursion

Wir stellen um

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k}.$$

und wieder eingesetzt

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}[\frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+2} + \widetilde{CF}_{t+2} | \mathcal{F}_{t+1}]}{1+k} + \widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k}.$$

Weil Kapitalkosten sicher

$$\widetilde{V}_t = \frac{\frac{1}{1+k}\,\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+2} | \mathcal{F}_{t+1}] | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{1+k}\,\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+2} | \mathcal{F}_{t+1}] | \mathcal{F}_t] + \mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k}.$$

Iterierte Erwartung

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+2} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^2} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+2} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^2}.$$

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Wenn Kapitalkosten sicher, dann

Satz (Fisher 1906, Williams 1938, Feltham/Ohlson 1995)

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+2} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{T} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^{T-t}}.$$

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

1. unendliche Lebensdauer,
2. konstante erwartete Wachstumsrate (autoregressive) Cashflows und
3. konstante Kapitalkosten.

Konstante Wachstumsrate

Kapitalkosten

Sichere Kapitalkosten

Bewertungsgleichu

Satz (Gordon/Shapiro 1956)

Wir nehmen eine ewige Rente an. Für den Marktwert eines (unverschuldeten) Unternehmens im Zeitpunkt $t \geq 0$ gilt

$$\widetilde{V}_t = \frac{1+g}{k-g}\,\widetilde{CF}_t. \tag{2}$$

In $t = 0$

$$V_0 = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_1]}{1+g} = \frac{(1+g)\,\mathrm{E}[\widetilde{CF}_1]}{(k-g)(1+g)} = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_1]}{k-g}.$$

Beweis

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Bei konstanten Wachstumsraten der Cashflows

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1+k} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+2} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{T} | \mathcal{F}_t]}{(1+k)^{T-t}}$$

$$\widetilde{V}_t = \frac{(1+g)\widetilde{CF}_t}{1+k} + \frac{(1+g)^2\widetilde{CF}_t}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{(1+g)^{T-t}\widetilde{CF}_t}{(1+k)^{T-t}}$$

$$= \widetilde{CF}_t \left(\frac{1+g}{1+k} + \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^{T-t} \right) .$$

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Zwischenschritt

$$\underbrace{\frac{1+g}{1+k}}_{=a} + \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^{T-t}$$
$$= a + a^2 + \ldots + a^T$$
$$= \frac{a - a^{T+1}}{1-a}$$

Wegen $g < k$ ist $a < 1$. Also konvergiert die Reihe für $T \to \infty$.

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Es folgt wegen $\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1+g}{1+k}\right)^T = 0$ im Fall der ewigen Rente

$$\widetilde{V}_t = \widetilde{CF}_t \frac{a}{1-a} = (1+g)\,\frac{\widetilde{CF}_t}{k-g}.$$

Das war zu zeigen.

Konstante Wachstumsrate
Kapitalkosten
Sichere Kapitalkosten
Bewertungsgleichu

Erwartete Kursgewinnrendite ist g:

$$\frac{\mathrm{E}[\widetilde{V}_{t+1}|\,\mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t} - 1 = \frac{\mathrm{E}[\frac{(1+g)\widetilde{CF}_{t+1}}{k-g}|\,\mathcal{F}_t]}{\frac{(1+g)\widetilde{CF}_t}{k-g}} - 1 \qquad \text{nach Gordon-Shapiro}$$

$$= \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_{t+1}|\,\mathcal{F}_t]}{\widetilde{CF}_t} - 1 \qquad \text{sichere Größe } \frac{1+g}{k-g} \text{ kürzen}$$

$$= \frac{\widetilde{CF}_t(1+g)}{\widetilde{CF}_t} - 1 = g \qquad \text{konst. Wachstumsrate}$$