Unternehmensbewertung und Steuern

DCF-Verfahren

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Freie Universität Berlin

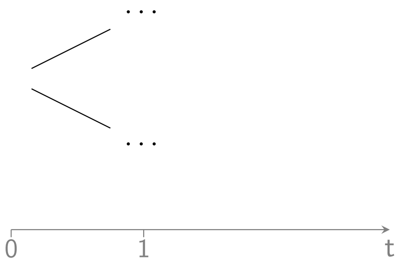
DCF-Verfahren beschäftigen sich ausschließlich mit Steuervorteilen in der Bewertung.

Ertragswertverfahren bilden ein Regelwerk für die gesamte Unternehmensbewertung (z.B. Institut der Wirtschaftsprüfer (2008), IDW S 1, siehe WPg Supplement 3/2008, S. 68 ff)

Wie beschreibt man Unsicherheit?

Unser Problem: Wir möchten eine unsichere Zukunft mit "immer dichterem Nebel" beschreiben, aber ein möglichst einfaches Modell nutzen.

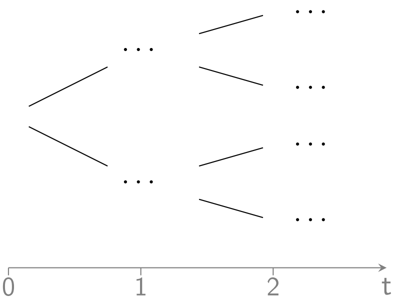
Abbildung: Wie modelliert man Cashflows?



Wie beschreibt man Unsicherheit?

Unser Problem: Wir möchten eine unsichere Zukunft mit “immer dichterem Nebel” beschreiben, aber ein möglichst einfaches Modell nutzen.

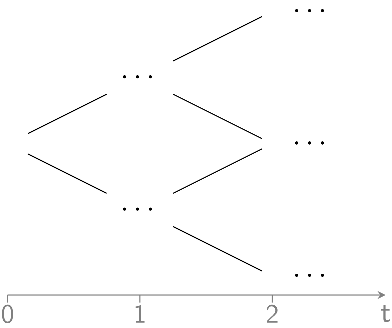
Abbildung: Wie modelliert man Cashflows?



Wie beschreibt man Unsicherheit?

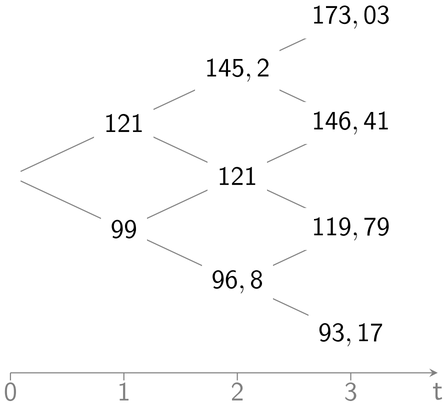
Unser Problem: Wir möchten eine unsichere Zukunft mit "immer dichterem Nebel" beschreiben, aber ein möglichst einfaches Modell nutzen.

Abbildung: Wie modelliert man Cashflows?



Ein Beispiel

Abbildung: Ein Beispiel für mögliche zukünftige Cashflows $\widetilde{CF}_t$ eines Unternehmens



Dieses Beispiel wollen wir jetzt verstehen.

Stichtagsprinzip

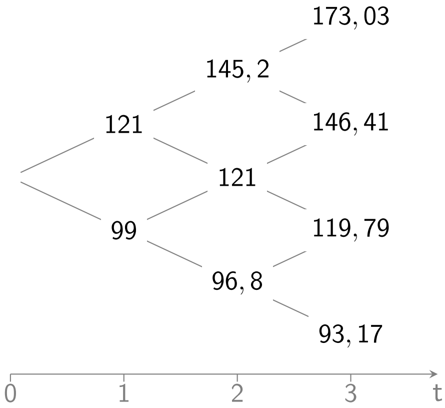
- Zuerst fallen die Zahlen "vom Himmel".
- Stichtagsprinzip: Wir verbleiben in $t = 0$ und dies hat Konsequenzen, wenn andere Cashflows in Zukunft eintreten.
- Streng genommen denken wir nur nach:

  Die Investorin überlegt, was sie in der Zukunft möglicherweise alles wissen wird.

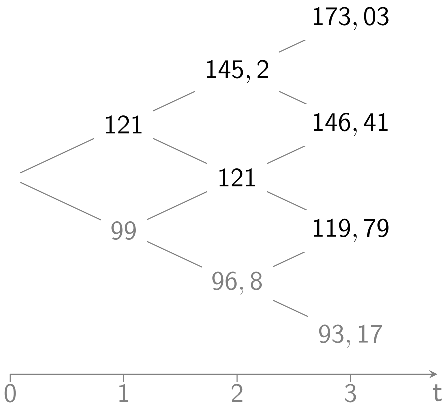
  Wir sprechen jedoch nicht darüber, was sie dann in t tatsächlich weiß – wir reden nur darüber, was sie (aufgrund des Modells) wissen sollte.

Was denken wir über (nicht in!) $t = 1$

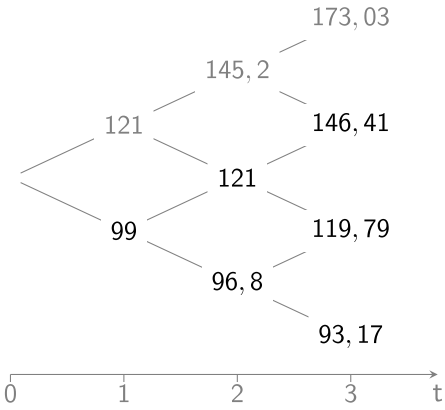
Versetzen wir uns gedanklich in den Zeitpunkt $t = 1$ und denken nach, was wir ausgehend von heutigem Wissen denken sollten. Hier gibt es aber zwei Möglichkeiten!



Entweder ist Cashflow 121



Oder Cashflow ist 99



"Unsicherer" Erwartungswert

Wir gehen einen Schritt weiter. Wir bilden Erwartungswerte, wobei wir weiterhin gedanklich in $t = 1$ bleiben (und wirklich nach wie vor in $t = 0$ sind). Uns interessiert der Erwartungswert $\widetilde{CF}_3$, gesehen aus $t = 1$.

Welche Konsequenzen hat dieses "konsistente Denken", wenn wir diesen Erwartungswert bilden?

Dafür benötigen wir ein neues Symbol, $\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_1]$. In Worten:

"Was werden wir, ausgehend von den Informationen in $t = 0$, in dem zukünftigen Zeitpunkt $t = 1$ über den Cashflow $\widetilde{CF}_3$, der im dritten Zeitpunkt anfallen wird, denken?"

Zurück zum Beispiel

Befindet wir uns im oberen Knoten, so wird der Cashflow im Zeitpunkt $t = 3$ nur noch 173,03, 146,41 oder 119,79 annehmen können. Der Wert 93,17 ist ausgeschlossen. Da der Wert 146,41 auf zwei Wegen erreicht werden kann, gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \text{oberer Knoten in } t = 1] \\ &\qquad = \frac{1}{4} 173,03 + \frac{2}{4} 146,41 + \frac{1}{4} 119,79 = 146,41. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \text{unterer Knoten in } t = 1] \\ &\qquad = \frac{1}{4} 146,41 + \frac{2}{4} 119,79 + \frac{1}{4} 93,17 = 119,79. \end{aligned}$$

Eine andere Schreibweise

Der bedingte Erwartungswert schreibt sich als

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_1] = \begin{cases} 146,41 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 121, \\ 119,79 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 99. \end{cases}$$

Es gibt nicht einen, sondern zwei Erwartungswerte von $\widetilde{CF}_3$, je nachdem ob der Cashflow $\widetilde{CF}_1$ 99 oder 121 ist.

Mathematisch präzise: Der (bedingte) Erwartungswert wird eine Zufallsvariable!

Zum anderen fällt auf

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_1] = \begin{cases} 121 \cdot 1,21 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 121, \\ 99 \cdot 1,21 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 99 \end{cases}$$

was sich schreiben lässt als

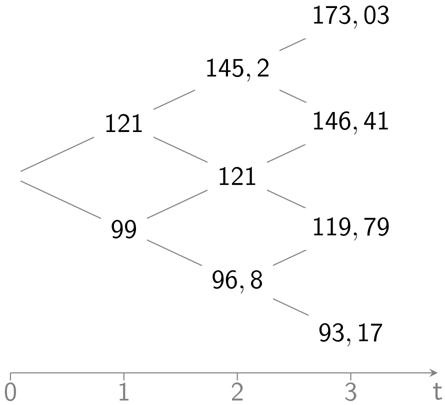
$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_1] = \begin{cases} \widetilde{CF}_1 \cdot (1 + 10\%)^2 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 121, \\ \widetilde{CF}_1 \cdot (1 + 10\%)^2 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 99 \end{cases}$$

oder eben auch

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_1] = (1 + 10\%)^{3-1} \cdot \widetilde{CF}_1.$$

Das war kein Zufall

Wir wollen erneut üben und $E[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_2]$ ermitteln.
Hier noch einmal die Grafik:



1. Es gibt jetzt drei, nicht zwei Möglichkeiten ($\widetilde{CF}_2 = 145,2$ oder $\widetilde{CF}_2 = 121$ oder $\widetilde{CF}_2 = 96,8$).
2. Je nach dem, welcher Cashflow eingetreten ist, unterscheiden sich dann die nachfolgenden $\widetilde{CF}_3$.

   Zum Beispiel: Bei $\widetilde{CF}_2 = 145,2$ sind nur $\widetilde{CF}_3 = 173,02$ oder $\widetilde{CF}_3 = 146,41$ (gleichwahrscheinlich) möglich.

Im oberen Knoten ergibt das dann

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3|\text{oberer Knoten in } t = 2] = \frac{1}{2}173,03+\frac{1}{2}146,41 = 159,72.$$

Wir erhalten

$$E[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_2] = \begin{cases} 159,72 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 145,2 \\ 133,1 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 121 \\ 106,48 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 96,8 \end{cases}$$

Wiederum

$$E[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_2] = (1 + 10\%)^{3-2} \cdot \widetilde{CF}_2$$

Wir wollen jetzt klären, was wir über unser "Wissen wissen". Genauer: Wie groß ist $\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_2] | \mathcal{F}_1]$.

In Worten: "Was wissen wir über die Erwartungen von $\widetilde{CF}_3$ im Zeitpunkt $t = 2$, wenn wir darüber im Zeitpunkt $t = 1$ nachdenken?"

1. Wie viel Zustände möglich? So viel wie in $t = 1$, also zwei.
2. Diese Zustände sind $\widetilde{CF}_1 = 99$ (unterer Knoten) oder $\widetilde{CF}_1 = 121$ (oberer Knoten).

Wir beginnen mit dem oberen Knoten. Hier kann $\widetilde{CF}_2 = 96,8$ nie erreicht werden. Damit können wir in obiger Gleichung folgende Zeile ignorieren:

$$\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3 | \mathcal{F}_2] = \begin{cases} 159,72 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 145,2 \\ 133,1 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 121 \\ 106,48 & \text{wenn } \widetilde{CF}_2 = 96,8 \end{cases}$$

Die anderen beiden sind dann gleich wahrscheinlich.

Wir erhalten so

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\text{ oberer Knoten in } t=1] = \frac{1}{2}159,72 + \frac{1}{2}133,1 = 146,41$$

und analog

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\text{ unterer Knoten in } t=1] = \frac{1}{2}133,1 + \frac{1}{2}106,48 = 119,79$$

Fassen wir zusammen

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\,\mathcal{F}_1] = \begin{cases} 146,41 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 121 \\ 119,79 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 99 \end{cases}$$

Wir erhalten so

$$\mathsf{E}[\mathsf{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\text{ oberer Knoten in } t=1] = \frac{1}{2}159,72 + \frac{1}{2}133,1 = 146,41$$

und analog

$$\mathsf{E}[\mathsf{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\text{ unterer Knoten in } t=1] = \frac{1}{2}133,1 + \frac{1}{2}106,48 = 119,79$$

Fassen wir zusammen

$$\mathsf{E}[\mathsf{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_2]|\,\mathcal{F}_1] = \begin{cases} 146,41 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 121 \\ 119,79 & \text{wenn } \widetilde{CF}_1 = 99 \end{cases}$$
$$= \mathsf{E}[\widetilde{CF}_3|\,\mathcal{F}_1].$$

Diese Aussage gilt allgemein (hier ohne Beweis). Wenn $s_1 < s_2 < t$

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\widetilde{CF}_t \,|\, \mathcal{F}_{s_2}] \,|\, \mathcal{F}_{s_1}] = \mathrm{E}[\widetilde{CF}_t \,|\, \mathcal{F}_{s_1}].$$

Es besagt, dass unser Wissen über die Zukunft in sich konsistent sein muss. Wir wissen immer nur so viel, wie uns am frühesten Zeitpunkt (dem Zeitpunkt mit der geringsten Information über die Unsicherheit) zur Verfügung steht.