Investition & Finanzierung

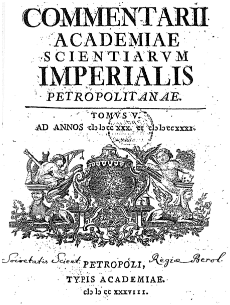
4. Investitionsrechnung unter Unsicherheit

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Freie Universität Berlin

Erwartungswert und Risikoneutralität
Drei Wege zum fairen Wert

Das “St. Petersburger Spiel”


COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.
TOMVS V.
AD ANNOS cIↄIↄccxxx. et cIↄIↄccxxxi.
Societatis Scient. PETROPOLI, Regiae Berol.
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄ Iↄ cc xxxviii.

Originale Veröffentlichung zum St. Petersburger Spiel

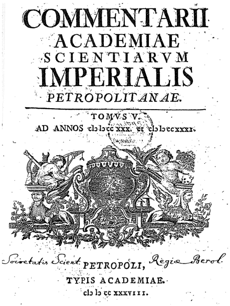
Wir werfen eine Münze, bis Zahl erscheint. Der Erlös beträgt

bei ... Würfen	Erlös
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
⋮	⋮

Wie hoch ist der faire Spieleinsatz für **ein** Spiel?

Historisch bedeutsame Fragestellung, weil hier zum ersten Mal die Bedeutung des Risikos in der Ökonomie aufgeworfen wurde.

Das "St. Petersburger Spiel"


COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.
TOMVS V.
AD ANNOS cIↄIↄccxxx. et cIↄIↄccxxxi.
Societatis Scient. PETROPOLI, Regiae Berol.
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄ Iↄ cc xxxviii.

Originale Veröffentlichung zum St. Petersburger Spiel

Wir werfen eine Münze, bis Zahl erscheint. Der Erlös beträgt

Zustand	Würfe	Erlös
Z	1	1
WZ	2	2
WWZ	3	4
WWWZ	4	8
WWWWZ	5	16
⋮	⋮	

Spieleinsatz für **ein** Spiel?

Historisch bedeutsame Fragestellung, weil hier zum ersten Mal die Bedeutung des Risikos in der Ökonomie aufgeworfen wurde.

Erwartungswert des Petersburger Paradoxes◁ 3 ▷

Selten bieten Menschen mehr als 20 Geldeinheiten für einen einmaligen Spieleinsatz. Aber das ist nach dem Kriterium des Erwartungswerts zu wenig, denn

$$\begin{aligned}
\text{Spieleinsatz} &= \text{Erwartungswert(Erlös)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Könnte das Problem daran liegen, dass man unter Umständen “fast unendlich” lange spielen könnte?

Endliches Petersburger Spiel

Würde man nach maximal 25 Würfen abbrechen, so beträgt die höchste Auszahlung

$$2^{25-1} \approx 16.700.000 \text{ Euro.}$$

Errechnet man nun den Erwartungswert, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\text{Spieleinsatz} &= \text{Erwartungswert(Erlös)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \cdots + \frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{23} + \frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{24} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 24 + 1 = 13\end{aligned}$$

und dies ist aber nur scheinbar eine Lösung des Paradoxes.

Eine veränderte Lotterie

Stellen Sie sich eine weitere Lotterie vor, bei der eine Münze geworfen wird (zwei Zustände: Kopf oder Zahl). Um an der Lotterie teilzunehmen, verpfänden Sie Ihr gesamtes zukünftiges Einkommen.

Kopf Wir verdoppeln Ihr gesamtes zukünftiges Einkommen.

Zahl Sie gehen leer aus.

Im Erwartungswert ist das ein faires Spiel:

$$\underbrace{\text{Einkommen}}_{\text{Einsatz}} = \underbrace{\frac{1}{2}2 \cdot \text{Einkommen} + \frac{1}{2}0}_{\text{erwarteter Erlös}}$$

Erwartungswert als schlechter Ratgeber

Wir halten fest: Entscheide nicht nach dem Erwartungswert, denn er ignoriert das Risiko! Der Erwartungswert ist ein schlechter Ratgeber.

Wer sich am Erwartungswert orientiert, ist dem Risiko gegenüber gleichgültig (“risikoneutral”).

Das Modell der Unsicherheit

Was genau bedeutet “eine Zahlung ist unsicher”?

In der Zukunft sind (endlich viele) Zustände möglich. Dabei gilt

1. verschiedene Zustände schließen einander aus,
2. jeder denkbare Zustand ist erfasst und
3. wir kennen die Eintrittswahrscheinlichkeiten.

Zustand s mit Wahrscheinlichkeit $p(s)$, wobei $\sum_{s=1}^{S} p(s) = 1$.

Das einfachste Beispiel unsicherer Zahlungen

Im einfachsten Fall sieht dies wie folgt aus

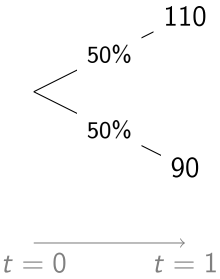


Abbildung: Annahmen im einfachsten Modell der Unsicherheit

Anmerkung: Stichtagsprinzip

Was passiert, wenn im vorigen Beispiel der tatsächliche Cashflow in $t = 1$ dann 100 beträgt?
Dann müssen wir ein neues Modell entwickeln (und das frühere wegwerfen).

Das Stichtagsprinzip besagt: Wir bleiben immer in $t = 0$ und denken nur über die Zukunft nach. Die "wirkliche Zukunft" spielt dagegen keine Rolle.
Unser Modell analysiert also nur unsere Gedanken über die Zukunft!

Wie verhalten sich Investoren? Folgende Definition ist zweckmäßig:

Definition Ein Investor heißt risikoavers, wenn der faire Wert unsicherer Zahlung kleiner dem risikolos diskontierten Erwartungswert

$$\text{fairer Wert} < \underbrace{\frac{\text{E[zukünftige CF]}}{1 + \text{risikoloser Zinssatz}}}_{\text{Wert bei Risikoneutralität}}.$$

Annahme Investoren sind risikoavers.

Wie ermittelt man den fairen Wert?

Vorgehensweise: Man geht aus von der Gleichung für risikoneutrale Investoren

$$\frac{\text{E[zukünftige CF]}}{1 + \text{risikoloser Zinssatz}}$$

und passt Zähler oder Nenner geeignet an.

Zähler (Zahlungen) Sicherheitsäquivalentmethode (Nutzentheorie)

Zähler (Wahrscheinlichkeiten) risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten (Arbitragetheorie)

Nenner Risikozuschlagmethode (CAPM)

Diese drei Theorien führen eigentlich zum gleichen Wert. Sie treffen aber unterschiedliche Annahmen, die nicht immer gleichzeitig erfüllt sind.

Väter der Nutzentheorie

Bernoulli (1700-1782)

v. Neumann (1903-1957)

Morgenstern (1902-1977)

Ermittlung des Sicherheitsäquivalentes

Man beginnt mit einer "Nutzenfunktion". Bernoulli schlägt den Logarithmus vor.
Dann berechnet man nicht den Erwartungswert, sondern den Erwartungsnutzen (unser Beispiel):

$$\underbrace{50\% \cdot \ln(90) + 50\% \cdot \ln(110)}_{\text{Erwartungsnutzen}} \approx \ln(\underbrace{99,50}_{\text{Sicherheitsäquivalent}}).$$

und diese Gleichung definiert das Sicherheitsäquivalent. Der faire Wert ist dann

$$\text{fairer Wert} = \frac{99,50}{1 + 10\%} \approx 90,45$$

Weiterführende Fragen

Mehrere Fragen tauchen auf, die wir erst später behandeln können:

1. Kann man neben dem Logarithmus auch andere Funktionen verwenden?
2. Kann man an der Funktion den Grad der Risikoscheue ablesen?
3. Wie findet man zu seiner eigenen Risikoeinstellung die passende Funktion?

Das weitere Vorgehen

Wer Risiko ignoriert, berechnet

$$\frac{50\% \cdot 90 + 50\% \cdot 110}{1 + 10\%} = 90,91.$$

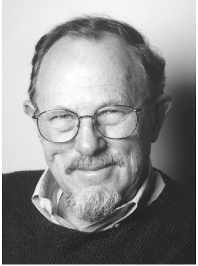
Der faire Wert 90,45 ergibt sich auf drei Wegen:

Nutzentheorie	CAPM	Arbitragetheorie
$\ln(99{,}50) \approx 50\% \cdot \ln(90) + 50\% \cdot \ln(110)$ $\frac{99{,}50}{1+10\%} = 90{,}45$	$\frac{50\% \cdot 90 + 50\% \cdot 110}{1+10\% + 0{,}55\%} = 90{,}45$	$\frac{52{,}51\% \cdot 90 + 47{,}49\% \cdot 110}{1+10\%} = 90{,}45$
Sicherheitsäqu.	Risikoprämie	risikoneutrale Wahrscheinl.

Väter des CAPM

Markowitz (1927-2023)

Tobin (1918-2002)



Sharpe (geb. 1934)

Wertpapiermarktlinie

Den fairen Wert ermittelt man nun durch Zuschlag beim Zinssatz

$$\text{fairer Wert} = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_1]}{1 + i + \text{Risikoprämie}}$$

Hauptergebnis des CAPM ist die Wertpapiermarktlinie.

Satz Unter gewissen Annahmen[1] ergibt sich die Risikoprämie aus

$$\text{Risikoprämie} = \underbrace{\text{Marktrisikoprämie}}_{\text{“Preis Risiko”}} \times \underbrace{\text{Beta}}_{\text{“Menge Risiko”}} .$$

Dieses Ergebnis muss erläutert werden.

[1] Details im Masterstudium.

Marktportfolio, Beta und systematisches Risiko ◁ 18 ▷

Das Marktportfolio umfasst sämtliche (riskanten) Wertpapiere eines Marktes: Aktien, Anleihen, Derivate, Zertifikate ...
Dabei wird nach Marktkapitalisierung gewichtet.

Das Beta misst offensichtlich "das Risiko" des Wertpapiers. Dieses Risiko wird nicht durch eine Varianz (Schwankung) der Rendite gemessen.

Wertpapiermarktlinie

Was bestimmt die "Menge des Risikos"?

"Das Risiko" eines Geschäftes zerfällt in zwei Bestandteile:

unsystematisches Risiko
: Fehlverhalten des Managements, Ineffizienzen, technologische und andere Mängel

systematisches Risiko
: gesamtwirtschaftliche Risiken, technologischer Wandel

Nur das systematische Risiko wird bewertet. Und dieses Risiko wird durch eine Kovarianz gemessen.

Ein Beispiel

Beta (250 Tage) 1.26

Ein Beispiel für einen Betafaktor (Infineon) im Jahr 2004 aus http://www.onvista.de/.

Definition Die erwartete Marktrendite ist die Durchschnittsrendite, die man erzielt, wenn man sein Vermögen auf den gesamten Kapitalmarkt verteilt. Marktrisikoprämie ist Differenz zwischen erwarteter Marktrendite und risikolosem Zinssatz.[2]

Das Beta eines Wertpapiers ist ein Sensitivitätsmaß das beschreibt, wie sich die Rendite einer bestimmten riskanten Kapitalanlage in Relation zur Marktrendite verhält.

Formal schreibt man $\mathrm{E}[r_M]$ für die erwartete Marktrendite und $\beta =_{\mathrm{Def}} \frac{\mathrm{Cov}[r_X, r_M]}{\mathrm{Var}[r_M]}$ für das Beta.

[2] Typische Werte waren in der Vergangenheit 5–6%.

Die Summe aus Zinssatz i und Risikoprämie wird auch Kapitalkosten genannt.[3]

Definition Kapitalkosten sind erwartete Renditen

$$\text{Kapitalkosten} =_{\text{Def}} \frac{\mathrm{E}[\widetilde{CF}_1]}{\text{Gegenwartswert}} - 1 = \mathrm{E}\left[\frac{\widetilde{CF}_1}{\text{fairer Wert}} - 1\right].$$

[3] Dies hat nichts mit Kostenrechnung zu tun.

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

In unserem Beispiel ergibt sich der faire Preis, wenn

$$q(\text{Zustand } 1) = 47,475\%, \qquad q(\text{Zustand } 2) = 52,525\%$$

Diese Wahrscheinlichkeiten entsprechen nicht den wirklichen Eintrittswahrscheinlichkeiten. Man nennt sie risikoneutral.

1. Wieso nennt man sie risikoneutral?
2. Ergeben sich immer Zahlen zwischen 0 und 1 (also "Wahrscheinlichkeiten")?

Das ist Gegenstand der "Arbitragetheorie".

Zur Bezeichnung

Um die Bezeichnung zu verstehen, berechnen wir die erwartete Rendite:

$$\frac{47,475\% \cdot 110 + 52,525\% \cdot 90}{90,45} - 1 = 10\% \text{ (= risikoloser Zins)}$$

Anmerkung: Man kann Gleichungssysteme mit Excel lösen

$$p(u) \cdot 110 + p(d) \cdot 90 = 90,45 \cdot (1 + 10\%)$$
$$p(u) + p(d) = 1$$

(Funktionen MINV und MMULT)

Zurück zu unserem Problem

$$\frac{47,475\% \cdot 110 + 52,525\% \cdot 90}{90,45} - 1 = 10\% \text{ (= risikoloser Zins)}$$

Wenn diese “Wahrscheinlichkeiten” (oft mit Q bezeichnet) unsere tatsächlichen Vorstellungen widerspiegeln würden, wäre die Welt unserer Ansicht nach risikoneutral. Das beantwortet die 1. Frage.

Um die 2. Frage zu beantworten, überlegen wir zuerst, was wir an Märkten nicht beobachten sollten.

Arbitrage Nr. 1: Berlin Alexanderplatz, 2004

Zuerst einmal gilt, dass “gleiche Zahlungen” (wie auch gleiche Produkte) immer auch gleich viel kosten müssen. Sonst spricht man von einer Arbitragegelegenheit:

eine Arbitragegelegenheit

Arbitrage Nr. 2: Zambia, 2006

Die zambische Währung lautet Kwacha, abgekürzt K.

Internet

30 min	2.000 K
60 min	5.000 K

Finden Sie einen Fehler, unabhängig vom Währungskurs!

Definition Ein Markt ist arbitragefrei, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Zerlegt man ein Portfolio, so ist der Preis des ursprünglichen Portfolios gleich der Summe der Einzelteile. Dies gilt auch, wenn man ein Portfolio neu zusammenstellt: $a \cdot p(X) + b \cdot p(Y) = p(a \cdot X + b \cdot Y)$
2. Wenn ein Portfolio mehr zahlt als ein anderes, dann ist es teurer: Wenn $X > Y$, dann $p(X) > p(Y)$.

Fundamentalsatz der Preistheorie

Fundamentalsatz Wenn ein Markt arbitragefrei ist, gibt es immer risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten.

Dieser Satz ist deshalb "fundamental", weil mit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten jedes Wertpapier fair bewerten werden kann.

Zusammenfassung

Nur risikoneutrale Investoren entscheiden nach dem Erwartungswert. Üblicherweise muss aber Risikoscheue unterstellt werden.

Um betriebswirtschaftliche Risikotheorien nutzen zu können, müssen zukünftige Zustände und ihre Wahrscheinlichkeiten vollständig bekannt sein.

risiko-neutral	risikoscheu		
	Nutzentheorie	CAPM	Arbitragetheorie
	–	(Wertpapiermarktlinie)	(Fundamentalsatz)
$\frac{EW[\widetilde{CF}]}{1+i}$	$\frac{SÄ}{1+i}$	$\frac{EW[\widetilde{CF}]}{1+\text{Kapitalkosten}}$	$\frac{EW_Q[\widetilde{CF}]}{1+i}$

Die Tabelle zeigt die drei Theorien zur Ermittlung des fairen Wertes mit ihren wesentlichen Theoremen sowie die Anpassungen in der Rechenmethode. (i sei der risikolose Zins.)