Investition & Finanzierung

2. Investitionsrechnung unter Sicherheit

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Freie Universität Berlin

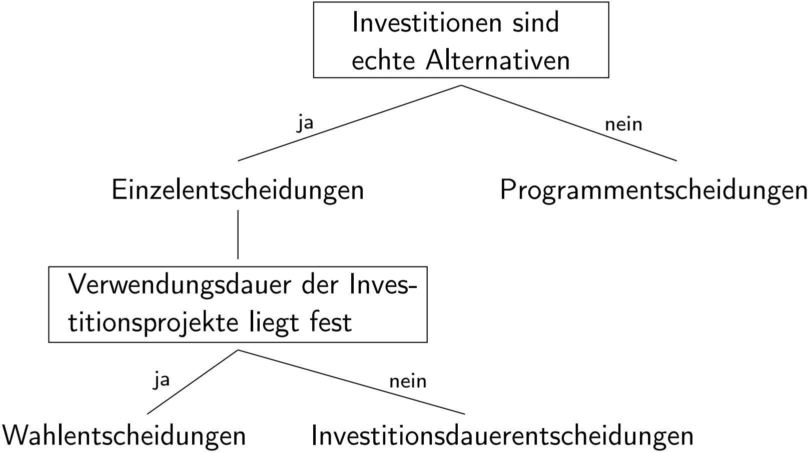
Version vom 6. Februar 2025

Unter “Cashflows” verstehen wir Ein- sowie Auszahlungen. Wir konzentrieren uns vollkommen auf diese Zahlungswirkungen und abstrahieren von allen anderen Eigenschaften.
Wir gehen davon aus, dass die Zahlungen CF_t aus einem Projekt sicher und uns bekannt sind. Das Projekt hat eine Laufzeit von T und kostet heute I_0.

- Investition ist eine Tätigkeit, die zunächst Auszahlungen und später Einzahlungen verursacht. $(- - + + +)$
- Finanzierung nennen wir dagegen einen Vorgang, der mit Einzahlungen beginnt, auf die später Auszahlungen folgen. $(+ - - - -)$

Alle anderen Aktivitäten haben keine eigenen Bezeichnungen.

Übersicht


Investitionen sind echte Alternativen
ja
nein
Einzelentscheidungen
Programmentscheidungen
Verwendungsdauer der Investitionsprojekte liegt fest
ja
nein
Wahlentscheidungen
Investitionsdauerentscheidungen

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
A	–100	40	70
B	–100	70	40

Statische Sicht

Wir verdienen mit beiden Projekten im Durchschnitt dasselbe. Daher

$$A \sim B.$$

Solche Verfahren werden wir nicht behandeln.

Dynamische Sicht

Frühe Einzahlungen sind angenehmer als späte. Daher

$$A \prec B.$$

Dynamische Verfahren

Wir behandeln hier

- Vollständiger Finanzplan
- Kapitalwertmethode (NPV, DCF)
- Interner Zinssatz (IRR)

NPV = net present value

DCF= discounted cashflow

IRR = internal rate of return

Vollständiger Finanzplan (Bsp. 2.2)

	Zeitpunkte		$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
Projekt A	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows	CF_t	–70	50	70	–
	Zinsen	Z_t		–10.50	–7.58	3.19
	Kontostand	K_t	–70	–50.50	31.93	25.12
Projekt B	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows	CF_t	–80	70	–20.00	90.00
	Zinsen	Z_t	100	–12	6.30	–7.25
	Kontostand	K_t	–80	–42	–48.30	24.46
Unterlassungs-alternative	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen	Z_t		0	–3.00	–0.45
	Kontostand	K_t	0	–20	–3.00	–13.45

"Basiszahlungen" und "Entnahmen" sind unabhängig von den Projekten. Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Vollständiger Finanzplan (Bsp. 2.2)

	Zeitpunkte		$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
Projekt A	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows	CF_t	–70	50.00	70.00	
	Zinsen	Z_t	100	–10.50	–7.58	3.19
	Kontostand	K_t	–70	–50.50	31.93	25.12
Projekt B	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows	CF_t	–80	70	–20.00	90.00
	Zinsen	Z_t		–12.00	–6.30	–7.25
	Kontostand	K_t	–80	–42.00	–48.30	24.46
Unterlassungs-alternative	Basiszahlungen	M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen	C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen	Z_t		0.00	–3.00	–0,45
	Kontostand	K_t	0	–20.00	–3.00	–13.45

"Basiszahlungen" und "Entnahmen" sind unabhängig von den Projekten. Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Beim Finanzplan wird das Endvermögen maximiert. Wie berechnet sich dieses Endvermögen?

$$K_0 = M_0 - C_0 - I_0$$

$$K_t = \begin{cases} M_t - C_t + CF_t + (1 + i_H) \cdot K_{t-1}, & \text{wenn } K_{t-1} \geq 0; \\ M_t - C_t + CF_t + (1 + i_S) \cdot K_{t-1}, & \text{wenn } K_{t-1} < 0. \end{cases}$$

(Das Projekt ist nur finanzierbar, wenn K_t in keinem Zeitpunkt kleiner als eine untere Schranke ist.)

Nachteil des Finanzplans: Man muss die Basiszahlungen M_t kennen.

Um den Kapitalwert zu verwenden setzt man einen perfekten Kapitalmarkt voraus.

Definition: Ein Kapitalmarkt heißt perfekt, wenn er

vollkommen ist (Habenzinsen i_H gleich Sollzinsen $i_S = i$),

unbeschränkt ist (kein Finanzierungslimit),

reibungsfrei ist (keine Transaktionskosten, Steuern).

Definition: Der Kapitalwert oder NPV ist

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

Die Entscheidungsregel beim Kapitalwert lautet

- Wähle die Investition mit dem höchsten Kapitalwert!
- Unterlasse Investitionen mit negativem NPV!

Was haben Kapitalwert und Endvermögensmaximierung gemeinsam? Sind es verschiedene Zielsetzungen? Nein. Dazu schauen wir uns die Budgetgleichungen genauer an:

$$K_0 = M_0 - C_0 - I_0$$
$$K_t = M_t - C_t + CF_t + (1 + i) \cdot K_{t-1}$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1+i) \cdot K_0 \\
&= M_1 - C_1 + CF_1 + (1+i) \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\
K_2 &= M_2 - C_2 + CF_2 + (1+i) \cdot K_1 \\
&= M_2 - C_2 + CF_2 \\
&\qquad + (1+i) \cdot (M_1 - C_1 + CF_1) \\
&\qquad\qquad + (1+i)^2 \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\
&= \sum_{t=0}^{2} (1+i)^{2-t} \cdot (M_t - C_t) \\
&\qquad - (1+i)^2 \cdot I_0 + \sum_{t=1}^{2} (1+i)^{2-t} \cdot CF_t
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich nach beständigem Einsetzen der Zusammenhang

$$K_T = \underbrace{\sum_{t=0}^{T}(1+i)^{T-t} \cdot (M_t - C_t)}_{\textit{projektunabhängig}}$$

$$+ \underbrace{(1+i)^T \cdot \overbrace{\left(-I_0 + \sum_{t=1}^{T}(1+i)^{-t} \cdot CF_t\right)}^{\textit{Kapitalwert}}}_{\textit{projektabhängig}} \qquad (*)$$

Satz Wir betrachten zwei Projekte A und B. Dann gilt:

Endkontostand bei A größer als bei B $\iff$ NPV von A $>$ NPV von B

Wir stellen fest: Wenn ein perfekter Kapitalmarkt vorliegt, führen Kapitalwert und vollständiger Finanzplan zu identischen Entscheidungen.

Kapitalwert: Tabellarische Berechnung (Abb. 4)

	Zeitpunkte	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
	Abzinsungsfaktoren	1	0,9091	0,8264	0,7513
	Cashflows,	–70,00	50,00	70,00	
A	... diskontiert	–70,00	45,45	57,85	
	... und addiert	**33,31**			
	Cashflows,	–80,00	70,00	–20,00	90,00
B	... diskontiert	–80,00	63,64	–16,53	67,62
	... und addiert	**34,73**			

Anmerkung: B ist besser als A, weil jetzt der Soll-Zinssatz 10% beträgt.

Wie kann man den Kapitalwert ökonomisch interpretieren?

$$NPV = - \underbrace{I_0}_{\text{Preis Investition}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \overbrace{\frac{CF_t}{(1+i)^t}}^{\text{Preis eines CF}}}_{\text{Preis aller CF am Kapitalm.}}$$

Der Kapitalwert beschreibt also die Preisdifferenz einer Investition im Verhältnis zum Kapitalmarkt!

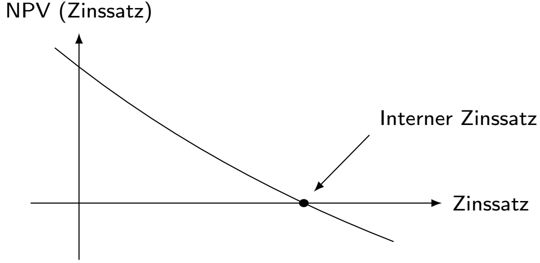
Die Frage: “Wie hoch ist die Rendite der Investition?”

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_z)^t} \stackrel{!}{=} 0$$

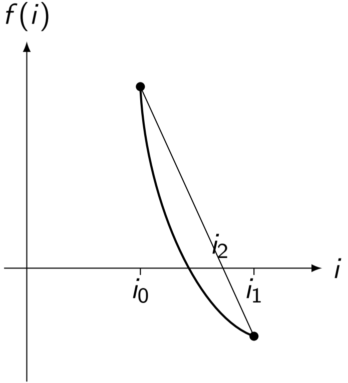
Mögliche Entscheidungsregel: Wähle die Investition mit dem höchsten internen Zinssatz i_z!
Unterlasse Investitionen, bei denen der interne Zins kleiner als der Marktzins ist ($i_z < i$)!

$$-I_0 = -70 \quad CF_1 = 50 \quad CF_2 = 70 \quad CF_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad i_z = 41.9\,\%$$

Wir zeichnen NPV als Funktion des Zinssatzes und suchen die Nullstelle.



Hinweis: Man bedient sich der Excel-Zielwertsuche (hilfreich: $Tage360(\cdot,\cdot)$) oder eines Näherungsverfahrens.



Wie findet man eine Nullstelle i^* einer Funktion $f(i)$?

Man verbindet die Funktionswerte der ersten beiden geschätzten Werte i_0 und i_1. Der Schnittpunkt mit der i-Achse ist der neue Wert i_2.

Für den neuen Wert i_2 gibt es drei Möglichkeiten

$$\begin{cases} f(i_2) = 0 & \text{Dann haben wir die Lösung!} \\ f(i_2) < 0 & i_2 \text{ ersetzt } i_1 \\ f(i_2) > 0 & i_2 \text{ ersetzt } i_0, \end{cases}$$

wobei in den letzten beiden Fällen die Rechnung erneut beginnt. Nach genügend vielen Schritten konvergiert das Verfahren für jede stetige Funktion f.

Die Gleichung einer Geraden lautet

$$y = a \cdot i + b$$

Dabei wissen wir bereits

$$f(i_0) = a \cdot i_0 + b$$
$$f(i_1) = a \cdot i_1 + b$$

und daraus lassen sich a und b bestimmen:

$$a = \frac{f(i_0) - f(i_1)}{i_0 - i_1}, \quad b = \frac{i_0 f(i_1) - i_1 f(i_0)}{i_0 - i_1}.$$

i_2 ist derjenige Punkt, an dem die Gerade die i-Achse schneidet, also

$$0 = a \cdot i_2 + b \quad \Longrightarrow \quad i_2 = \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}.$$

Wir suchen den internen Zins einer Investition mit $I_0 = 100$ und Cashflows $CF_1 = 30$, $CF_2 = 20$ und $CF_3 = 70$.
Das ergibt die Iterationsregel

$$i_2 = \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}$$

mit

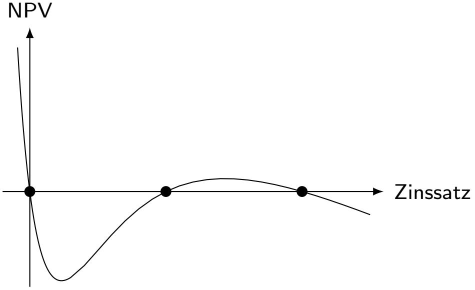
$$f(i) := -100 + \frac{30}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{70}{(1+i)^3}$$

Wir beginnen mit $i_0 = 0$ und $i_1 = 10\%$, da beide NPVs verschiedenes Vorzeichen aufweisen. Wir erhalten schrittweise mit der Gleichung aus der vorigen Folie

$$
\begin{aligned}
i_0 &= 0 \\
i_1 &= 0.1 \\
i_2 &= 0.0847 \\
i_3 &= 0.082260 \\
i_4 &= 0.082336 \\
i_5 &= 0.082336
\end{aligned}
$$

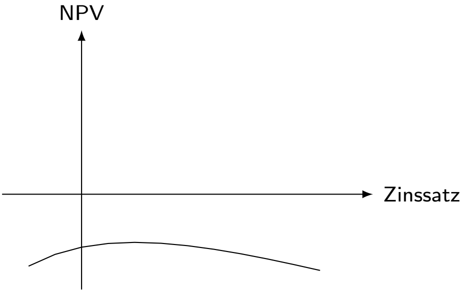
$$-I_0 = -1 \quad CF_1 = 6 \quad CF_2 = -11 \quad CF_3 = 6$$

$$i_{z,1} = 0\,\% \quad i_{z,2} = 100\,\% \quad i_{z,3} = 200\,\%$$



$$-I_0 = -1000 \quad CF_1 = 2090 \quad CF_2 = -1093$$

$$i_z = \frac{\pm\sqrt{-39} + 9}{200}$$



Kapitalwertfunktion ist eine Polynomfunktion T–ten Grades. Daher gibt es grundsätzlich T reelle oder komplexe Lösungen.

Zudem kann die Entscheidung auch ökonomisch falsch sein:

	$t = 0$	$t = 1$
Projekt A	–1	5
Projekt B	–10	20

Wegen

$$i_{z,A} = 400\,\% > i_{z,B} = 100\,\%$$

entscheidet man mit dem internen Zinssatz zu Gunsten von Projekt A. Bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\,\%$ ist jedoch Investition B besser als Projekt A.

Äußerste Vorsicht bei der Anwendung des internen Zinses! Immer zusätzlich den Kapitalwert ermitteln.

Die Preisangabenverordnung verlangt, dass bei

- Krediten
- an Privatpersonen

ein “effektiver Jahreszins” (= interner Zins) anzugeben ist.

Kann man diesen internen Zins immer eindeutig ermitteln? Der interne Zinssatz ist eindeutig und positiv, wenn

- eine Normalinvestition vorliegt (ein Vorzeichenwechsel),
- die das Deckungskriterium erfüllt (mehr Einzahlungen als Auszahlungen).

Unsere Aussagen zur (mehr oder weniger) eindeutigen Festlegung des Internen Zinses durch die Preisangabenverordnung gelten nicht für Geldanlagen. Hier sind andere Rendite-Definitionen üblich.

V_t sei der Wert einer Investition in t.

Definition Diskrete Rendite einer Investition

$$r_t^{\mathsf{diskret}} := \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1$$

Log-Rendite einer Investition

$$r_t^{\mathsf{Log}} := \ln(V_{t+1}) - \ln(V_t).$$

Diskrete Renditen verwendet man typischerweise in Modellen mit diskreter Zeit (links), Log-Renditen finden sich oft in Modellen mit stetiger Zeit.

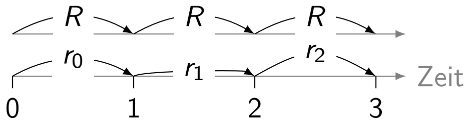
Sind beide Renditen verwandt?

Ja: Wir nutzen dazu die Taylorreihenentwicklung für $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ mit $x = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ an der Stelle 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x-1)$$
$$r_t^{\text{log}} = \ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{V_{t+1}}{V_t} - 1\right) = r_t^{\text{diskret}}$$
$$r_t^{\text{log}} \approx r_t^{\text{diskret}}$$

Für kleine Werte weichen beide Renditen nicht stark voneinander ab.

Will man Durchschnitte vergangener Renditen bilden, welches Vorgehen ist dann zweckmäßig?



Die Einzelrenditen r_0 bis r_2 weisen eine unterschiedliche Stärke auf (illustriert durch die Höhe der Pfeile), die zweckmäßige Durchschnittsrendite R ist dagegen konstant. R soll so definiert sein, dass sich der gleiche Endwert ergibt.

Satz: Die zweckmäßige durchschnittliche diskrete Rendite R^{diskret} ist das geometrische Mittel der r_t^{diskret}.

Hinweis: Dabei sind alle Renditen für die Berechnung um Eins zu erhöhen.

Beweis: Endvermögen nach T Perioden

$$V_T = V_0 \cdot (1 + r_0^{\text{diskret}}) \cdot (1 + r_1^{\text{diskret}}) \cdots (1 + r_{T-1}^{\text{diskret}}).$$

Mit einer zweckmäßigen Durchschnittsrendite R^{diskret} soll sich ebenfalls V_T ergeben:

$$V_T = V_0 \cdot (1 + R^{\text{diskret}})^T.$$

Daraus folgt sofort

$$1 + R^{\text{diskret}} = \sqrt[T]{(1 + r_0^{\text{diskret}}) \cdot (1 + r_1^{\text{diskret}}) \cdots (1 + r_{T-1}^{\text{diskret}})}$$

Satz: Die zweckmäßige durchschnittliche Log-Rendite R^{Log} ist das arithmetische Mittel der r_t^{Log}.

Beweis: Zuerst einmal gilt

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{V_T}{V_{T-1}} \cdot \frac{V_{T-1}}{V_{T-2}} \cdot \frac{V_{T-2}}{V_{T-3}} \cdots \frac{V_1}{V_0},$$

Logarithmus auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) &= \ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right) + \ln\left(\frac{V_{T-1}}{V_{T-2}}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} r_t^{\mathrm{Log}}.\end{aligned}$$

Mit zweckmäßiger Durchschnittsrendite T Mal gilt

$$\ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} R^{\text{Log}} = TR^{\text{Log}}.$$

Daraus folgt dann

$$R^{\text{Log}} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} r_t^{\text{Log}}$$

Beispiel

Was passiert, wenn man dies durcheinander bringt? Beispiel einer Wertentwicklung

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
100	200	100

“Außer Spesen nichts gewesen”!

Diskrete Renditen sind hier +100% und -50%. Der arithmetische Durchschnitt ist

$$\frac{100\% - 50\%}{2} = 25\%!!$$

Diskrete Renditen sind hier +100% und -50%. Der geometrische Durchschnitt ist dagegen

$$\sqrt{(1 + 100\%)(1 - 50\%)} = 1 + 0\%$$

Die Log-Renditen betragen +69,31% und -69,31%. Der arithmetische Durchschnitt ist offensichtlich 0%.

- Vollständiger Finanzplan und Kapitalwert führen zu identischen Entscheidungen, Kapitalwert setzt perfekte Märkte voraus (Sollzins=Habenzins, keine Steuern und Transaktionskosten, kein Kreditlimit)
- Kapitalwert vergleicht Investition mit Kapitalmarktanlage
- interner Zins muss mit Näherungsverfahren bestimmt werden, stellt eine problematische Größe dar
- Ein zweckmäßiger Durchschnitt diskreter Renditen ist das geometrische Mittel; ein zweckmäßiger Durchschnitt von Log-Renditen ist das arithmetische Mittel.