Investition & Finanzierung

1. Finanzmathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Freie Universität Berlin

Version vom 6. Februar 2025

Laufzeit	T	(Jahre)
Zinssatz	i	(Prozentsatz)
Anfangskapital	K_0	(Geldeinheiten)
Endkapital	K_T	(Geldeinheiten)

Ab und an findet wird das Symbol $q = 1 + i$ verwendet.

t	Z_t	K_t	Zinseszinsformel
0		1.000	K_0
1	100	1.100	$K_1 = K_0 + iK_0 = K_0(1+i)$
2	110	1.210	$K_2 = K_1 + iK_1 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	121	1.331	$K_3 = K_2 + iK_2 = K_2(1+i) = K_0(1+i)^3$

Verallgemeinerung liefert die Zinseszinsformel

$$K_T = K_0\,(1+i)^T = K_0\,q^T$$

Die vier Fragestellungen der Zinseszinsrechnung $\triangleleft$ 4 $\triangleright$

Wenn drei (beliebige) Größen gegeben sind, lässt sich die vierte immer berechnen.

$$
\begin{aligned}
K_T &= K_0(1+i)^T \\
K_0 &= K_T \frac{1}{(1+i)^T} = K_T(1+i)^{-T} \\
T &= \frac{\ln\left(\frac{K_T}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} \\
i &= \sqrt[T]{\frac{K_T}{K_0}} - 1
\end{aligned}
$$

Der Diskontierungs– oder Abzinsungsfaktor

$$(1+i)^{-T}$$

beschreibt,

- wie viel Geld man heute ($t = 0$) anlegen muss,
- um bei einem Zins in Höhe von i
- nach T Jahren
- Anspruch auf 1 € zu erwerben.

Man kann ihn daher als Preis für künftige Zahlungen interpretieren.

Aufzinsungsfaktor

Der Aufzinsungsfaktor

$$(1+i)^T$$

beschreibt,

- wie viel Geld man
- nach T Jahren erhält,
- wenn der Zins gerade i beträgt und
- man 1 € anlegt.

Man kann ihn daher als künftiger Wert heutiger Zahlungen interpretieren.

	Aufzinsungsfaktor: $(1+i)^T$			Abzinsungsfaktor: $(1+i)^{-T}$		
T	$i = 5\,\%$	$i = 10\,\%$	$i = 15\,\%$	$i = 5\,\%$	$i = 10\,\%$	$i = 15\,\%$
1	1,0500	1,1000	1,1500	0,9524	0,9091	0,869
2	1,1025	1,2100	1,3225	0,9070	0,8264	0,756
5	1,2763	1,6105	2,0114	0,7835	0,6209	0,497
10	1,6289	2,5937	4,0456	0,6139	0,3855	0,247

Excel: Extras oder Daten → Datentabelle/Mehrfachoperation

Laufzeit	T	(Jahre)
Zinssatz	i	(Prozentsatz)
Rente	r	(Geldeinheiten)
Rentenendwert	R_T	(Geldeinheiten)
Rentenbarwert	R_0	(Geldeinheiten)

Endwert einer veränderlichen Rente (Abschnitt 1.3)

r_1	1.000 €
r_2	1.200 €
r_3	1.300 €
T	3
i	10 %

Intuition: Ergebnis einer Geldanlage (Rentenversicherung)

t	Z_t	r_t	R_t		Rentenformel
1		1.000	1.000	R_1	$= r_1$
2	100	1.200	2.300	R_2	$= R_1 + iR_1 + r_2 = r_1(1+i) + r_2$
3	230	1.300	3.830	R_3	$= R_2 + iR_2 + r_3$
					$= R_2(1+i) + r_3$
					$= (r_1(1+i) + r_2)(1+i) + r_3$
					$= r_1(1+i)^2 + r_2(1+i) + r_3$
					$= r_1(1+i)^2 + r_2(1+i)^1 + r_3(1+i)^0$

Wir erhalten also allgemein

$$\begin{aligned} R_T &= r_1(1+i)^{T-1} + r_2(1+i)^{T-2} + \ldots + r_T(1+i)^0 \\ &= \sum_{t=1}^{T} r_t(1+i)^{T-t}. \end{aligned}$$

Endwertformel für gleichbleibende nachschüssige Rente

Es gilt

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_T = r\,.$$

In diesem speziellen Fall können wir wie folgt rechnen ($q = 1 + i$):

$$\begin{array}{rcccccccccccc} R_T & = & & & rq^{T-1} & + & rq^{T-2} & + & \ldots & + & rq^1 & + & rq^0 \\ q\,R_T & = & rq^T & + & rq^{T-1} & + & rq^{T-2} & + & \ldots & + & rq^1 & & \end{array}$$

Zieht man von der letzten Gleichung die erste ab, ergibt sich

$$\begin{aligned} (1+i)R_T - R_T &= rq^T - r \\ R_T i &= r\left(q^T - 1\right) \\ R_T &= r\ \frac{(1+i)^T - 1}{i}. \end{aligned}$$

Aus der Zinseszinsrechnung wissen wir, dass

$$K_0 = \frac{K_T}{(1+i)^T}$$

gilt.
Daher erhalten wir für den Barwert einer veränderlichen nachschüssigen Rente

$$R_T = \sum_{t=1}^{T} r_t (1+i)^{T-t} \qquad \Longrightarrow \qquad R_0 = \sum_{t=1}^{T} r_t (1+i)^{-t}$$

und für den Barwert einer gleichbleibenden nachschüssigen Rente

$$R_T = r\frac{(1+i)^T - 1}{i} \qquad \Longrightarrow \qquad R_0 = r\frac{(1+i)^T - 1}{i(1+i)^T}\,.$$

Intuition: fairer Preis einer Geldanlage (Entschädigungszahlung)

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \lim_{T\to\infty} r \cdot \left(\frac{(1+i)^T - 1}{i(1+i)^T} \right) \\
&= r \cdot \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^T} \right) \\
&= r \cdot \left(\frac{1}{i} - \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{i(1+i)^T}}_{=0} \right) \\
&= \frac{r}{i} \quad .
\end{aligned}
$$

Wenn drei (beliebige) Größen gegeben sind, lässt sich die jeweils vierte immer berechnen.

Rentenbarwertrechnung	Rentenendwertrechnung
$R_0 = r \, \dfrac{(1+i)^T - 1}{i \cdot (1+i)^T}$	$R_T = r \, \dfrac{(1+i)^T - 1}{i}$
$r = R_0 \, \dfrac{i \cdot (1+i)^T}{(1+i)^T - 1}$	$r = R_T \, \dfrac{i}{(1+i)^T - 1}$
$T = \dfrac{\ln\left(\frac{r}{r - i\,R_0}\right)}{\ln(1+i)}$	$T = \dfrac{\ln\left(\frac{r + i\,R_T}{r}\right)}{\ln(1+i)}$
$i = \ldots$ (Excel)	$i = \ldots$ (Excel)

Excel: Extras → Zielwertsuche

Schuldbetrag im Zeitpunkt t	K_t	(€)
Zinssatz	i	(%)
Laufzeit	T	(Jahre)
Tilgungsrate im Zeitpunkt t	T_t	(€)
Zinsbetrag im Zeitpunkt t	Z_t	(€)
Annuität im Zeitpunkt t	A_t	(€)

$$A_t = T_t + Z_t$$
$$K_t = K_{t-1} - T_t$$
$$K_0 = \sum_{t=1}^{T} T_t$$
$$Z_t = i \cdot K_{t-1}$$

Daraus folgt (ohne dass das hier bewiesen wird)

$$K_0 = \sum_{t=1}^{T} A_t \cdot (1+i)^{-t}\,.$$

Charakteristisches Merkmal: gleichbleibende Tilgungsraten[1]

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_T.$$

Berechnung der Tilgungsrate:

$$T = \frac{K_0}{T}\,.$$

Der Rest ist unkompliziert.

[1] Die Bezeichnung T_T ist unglücklich.

$$K_0 = 2.100 \qquad i = 10\% \qquad T = 3$$

$$T = \frac{2.100}{3} = 700$$

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	2.100	210	700	910
2	1.400	140	700	840
3	700	70	700	770

Charakteristisches Merkmal: gleichbleibende Annuitäten

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_T = A.$$

Berechnung der Annuität:

$$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^T}{(1+i)^T - 1}\,.$$

(Die Annuität ist eine gleichbleibende Rente.)
Der Rest ist nicht kompliziert.

$$K_0 = 2.100 \qquad i = 0.1 \qquad T = 3$$

$$A = 2.100 \cdot \frac{0.1 \cdot 1.1^3}{1.1^3 - 1} = 844,44$$

t	K_{t-1}	Z_t	T_t	A_t
1	2.100,00	210,00	634,44	844,44
2	1.465,56	146,56	697,89	844,44
3	767,67	76,77	767,67	844,44

Nützlich ist auch der Zusammenhang: $T_{t+1} = T_t(1+i)$.

- Diskontierungsfaktoren sind Preise zukünftiger Geldmengen, Aufzinsungsfaktoren sind zukünftige Werte heutiger Geldmengen
- Regelmäßige Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten lassen sich durch Zinseszins-, Renten- und Tilgungsformeln erfassen. Im Fall der ewigen Rente gilt sogar $\frac{r}{i}$.
- Bei einer Ratentilgung ist die Tilgung konstant, bei einer Annuitätentilgung die Annuität.