Freie Universität Berlin

# Übungsaufgaben "Finanzierung und Investition" SS 2026

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Dr. A. Löffler

27. März 2026

# Inhaltsverzeichnis

# Übungsaufgaben

## Set 1

*Aufgabe 1* Wie viel Geld müssen Sie heute auf ein Sparbuch einzahlen, damit Sie in 6 Jahren 10.000€ abheben können? Das Kapital verzinst sich jährlich mit 4%.

*Aufgabe 2* Wie hoch muss der Zinssatz für ein Sparguthaben sein, damit sich Ihr Kapital innerhalb von 20 Jahren verdreifacht? Bitte tragen Sie einen Prozentsatz ein (6% statt 0.06).

*Aufgabe 3* Bei welchem Zinssatz erreichen Sie ein Endkapital von 5.000€ , wenn Sie 3.000€ für 7 Jahre auf einem Sparbuch anlegen? Bitte tragen Sie einen Prozentsatz ein (z.B. 6% statt 0.06).

*Aufgabe 4* In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Betrag von 15.000€ bei 6,5% Zinssatz?

*Aufgabe 5* Sie erhalten heute einen Kredit in Höhe von 15.500€ , für den Sie nach 13 Jahren einschließlich Zins und Zinseszins 35.146,06€ zurückzahlen müssen. Wie groß ist der Zinssatz?

*Aufgabe 6* Wie viel Geld muss ein Vater bei der Geburt seiner Tochter anlegen, wenn diese an ihrem 18. Geburtstag über 20.000€ verfügen soll und die Bank Zinsen in Höhe von 5,5% p.a. verspricht?

*Aufgabe 7* Sie besitzen heute 18.770,15€ und legen diesen Betrag zu 4% an. Wie groß ist eine Rente, die Sie Ihrer Tochter aus diesem Kapital für insgesamt 12 Jahre (beginnend ab dem nächsten Jahr) zahlen könnten?

*Aufgabe 8* Jemand hat sich heute verpflichtet, 10 Jahre lang am Jahresende 700€ zu zahlen. Mit welchem Betrag könnte er sich heute bei einem Zins von 5% durch eine einmalige Sofortzahlung von dieser Verpflichtung befreien?

*Aufgabe 9* Jemand ist verpflichtet, an einen Dritten 25 Jahre lang nachschüssig 1.000€ zu zahlen. Er kann aber alternativ auch eine einmalige Zahlung leisten. Wie hoch muss diese heute ausfallen, wenn man mit einem Zinssatz von 4% rechnet?

*Aufgabe 10* Ein Unternehmer veräußert sein Geschäft gegen eine jährlich zu zahlende Rente in Höhe von 55.000€ . Die Laufzeit der Rente beträgt 20 Jahre. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente bei einem Zinssatz von 6%?

*Aufgabe 11* Jemand legt 8 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 2.800€ an. Zum Schluss besitzt er 27.712,91€ . Wie groß ist dann der Zinssatz gewesen?

Hinweis: Beginnen Sie für einen einfacheren Abgleich Ihrer Lösungen mit den Startwerten 1% und 10%.

*Anmerkung: Sie werden es nicht schaffen, hier eine Formel für den Zinssatz zu erhalten. Die Aufgabe muss näherungsweise gelöst werden. Dazu erhalten Sie jetzt einen Hinweis, der Ihnen behilflich sein kann.*
*Wenn Sie die Nullstelle einer Funktion*

$$f(i) = 0$$

*näherungsweise bestimmen wollen, dann kann man eine Näherungsformel nutzen.*[1] *Zu zwei Werten $i_0$ und $i_1$, für die $f(i_0)$ und $f(i_1)$ unterschiedliche Vorzeichen aufweisen, wählt man einen nächsten Wert $i_2$ dergestalt, dass*

$$i_2 := \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}.$$

*Der neue Wert $i_2$ ersetzt nun je nach Situation einen der beiden Startwerte:*

$f(i_2) = 0$ *In diesem Fall haben wir die Nullstelle gefunden.*

$f(i_2) < 0$ *In diesem Fall ersetzen wir $i_1$ durch $i_2$, lassen $i_0$ unverändert und starten das Verfahren erneut.*

$f(i_2) > 0$ *In diesem Fall ersetzen wir $i_0$ durch $i_2$, lassen $i_1$ unverändert und starten das Verfahren erneut.*

*Dieses Verfahren wird hier sehr schnell konvergieren, sechs Iterationen sollten reichen.*

1. Sie finden in der Formelsammlung (siehe unsere Webseite) und in den Vorlesungen weitere Hinweise zu Näherungsverfahren.

## Set 2

*Aufgabe 1* Herrn M. wird ein Wegerecht für alle Zeiten eingeräumt. Dafür muss M auf unbegrenzte Zeit jährlich 1.800€ zahlen. Mit welcher Einmalzahlung könnte sich M von dieser Verpflichtung befreien, wenn man mit einem Zins von 8% rechnet?

*Aufgabe 2* Sie wollen einen Kredit über 180.000€ zu 7% Zinsen aufnehmen, der über 5 Jahre in gleichbleibenden Raten zu tilgen ist. Stellen Sie den vollständigen Tilgungsplan auf und geben Sie die Annuitäten der Jahre 1 bis 5 an.

*Hinweis: Die Lösung wird in Tabellenform eingegeben. Die Spaltenüberschriften wählen Sie dabei wie folgt*

$t \quad K_{t-1} \quad Z_t \quad T_t \quad A_t$

*In github geben Sie bitte die Tabelle ohne die Spalte mit den Zeitpunkten und ohne die Kopfzeile ein. Beachten Sie bei der Eingabe: Zuerst rechnen, dann runden!*

*Aufgabe 3* Wie hoch ist die Annuität für Aufgabe 2, wenn der Kredit annuitätisch getilgt werden soll?

*Aufgabe 4* Ein Lottogewinn von 200.000€ wird zu 4% angelegt. Der Gewinner möchte nach Ablauf von 8 Jahren 12 Jahre lang einen jährlich gleichen Betrag abheben, so dass sein Kapital nach der letzten Abhebung aufgebraucht ist. Wie hoch ist die jährliche Rente?

*Aufgabe 5* Ein Kredit über 100.000€ soll bei einem Zinssatz von 8% annuitätisch getilgt werden. Die Laufzeit beträgt zehn Jahre, wovon die ersten vier tilgungsfrei sind. Wie hoch ist die Annuität der Jahre fünf bis zehn?

*Aufgabe 6* Ein Investor hat unter den Bedingungen eines unvollkommenen und unbeschränkten Marktes die Wahl zwischen den Projekten A und B:

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 |
|---:|---:|---:|---:|
| Investition A | -900€ | 0€ | 1.700€ |
| Investition B | -1.300€ | 2.000€ | 0€ |

Er besitzt in $t = 0$ ein Startguthaben in Höhe von 1.000€ . Er wünscht in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ Entnahmen in Höhe von 50€ und ist im übrigen an einem möglichst hohen Endvermögen interessiert. Welches Projekt verdient den Vorzug, wenn man finanzielle Überschüsse zu 15% anlegen und Defizite zu einem Zins von 25% decken kann? Geben Sie das Endvermögen der Projekte A und B (in Euro und in dieser Reihenfolge) an.

*Aufgabe 7* Betrachten Sie erneut die Projekte A und B aus der letzten Aufgabe. Die Laufzeit beider Projekte beträgt wieder zwei Jahre. Gehen Sie nun aber davon aus, dass der Zinssatz 20% beträgt und eine Ertragsteuer in Höhe von 33% erhoben wird.

Wenn Sie den Kapitalwert mit Steuern als Entscheidungskriterium verwenden, welchem Projekt ist dann der Vorzug zu geben? Geben Sie zu diesem Zweck die Kapitalwerte mit Steuern von A und B in github ein.

## Set 3

*Aufgabe 1* Sie wissen, dass ein Kredit über fünf Jahre mit einer Annutität von 100.000 und einem Zins von 5% getilgt wurde. Wie hoch war der Kreditbetrag?

*Aufgabe 2* Es liegt der folgende unvollständige Tilgungsplan für eine annuitätische Tilgung vor:

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 362.500 | 865.127,42 | |
| 2 | | | 927.849,16 | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |

Vervollständigen Sie den Tilgungsplan.

*In github geben Sie bitte die Tabelle ohne die Spalte mit den Zeitpunkten und ohne die Kopfzeile ein. Beachten Sie bei der Eingabe: Zuerst rechnen, dann runden!*

*Aufgabe 3* Eine AG hat einen Planungshorizont von 4 Jahren und verfolge das Ziel der Endvermögensmaximierung. Gleichgültig, ob Investitionen durchgeführt werden oder nicht, fallen in den Zeitpunkten $t = 0$ bis $t = 4$ bestimmte Zahlungen an (Basiszahlungen). Sofort und danach am Ende jedes Jahres $t$ werden Entnahmen $C_t$ gewünscht, die mit 70€ beginnen und dann ansteigen. Diese Zahlungen sollen sich in den einzelnen Jahren wie 1 zu 1.2 zu 1.3 zu 1.5 zu 1.6 verhalten:

$$C_0 : C_1 : C_2 : C_3 : C_4 = 1 : 1.2 : 1.3 : 1.5 : 1.6\,.$$

Der Kapitalmarkt sei unvollkommen, wobei sich die Zinssätze, welche für Geldanlagen bzw. Kredite erwartet werden, aus der nachstehenden Tabelle ergeben. Es kann Kredit im Umfang von höchstens 600€ aufgenommen werden.

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Basiszahlungen | 500 | 130 | -140 | 150 | 300 |
| Investition A | -1.000 | 750 | 280 | 200 | -30 |
| Investition B | -800 | 330 | 530 | -50 | 200 |
| Investition C | -950 | 0 | 0 | 560 | 795 |
| | | | | | |
| Habenzins | 7% | 6% | 5% | 5% | |
| Sollzins | 11% | 10% | 10% | 9% | |

Berechnen Sie die Endwerte aller finanzierbaren Alternativen mit Hilfe vollständiger Finanzpläne. Welches Projekt ist unter den vorliegenden Bedingungen am günstigsten?

*Für github gilt: Ermitteln Sie die Endvermögen bei Investition A, Investition B, Investition C und der Unterlassung (in dieser Reihenfolge). Wenn ein Projekt nicht durchgeführt werden kann, tragen Sie bitte statt des Endvermögens "0" ein.*

*Aufgabe 4* Ein Investor entscheidet unter den Bedingungen eines unvollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarktes. Er hat zwischen den Projekten A und B zu wählen und besitzt folgende Informationen:

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Basiszahlungen | 1.000 | -300 | 200 | 600 | 800 |
| | | | | | |
| Investition A | -3.000 | 1.000 | 1.100 | 800 | 700 |
| Investition B | -4.000 | 2.000 | -800 | 1.500 | 2.100 |
| | | | | | |
| Habenzins | 6% | 8% | 8% | 8% | |
| Sollzins | 8% | 12% | 12% | 10% | |

*Abbildung 1:* Zahlungen zum Set 3, Aufgabe 4

Der Investor benötigt ab dem Jahre $t = 0$ Entnahmen auf dem Niveau von 200, die Entnahmen sollen in jedem Jahr um 10% gegenüber dem Vorjahr steigen. Er ist im übrigen an einer Endvermögensmaximierung interessiert. Welches Projekt soll der Investor wählen?

*Für github gilt: Ermitteln Sie die Endvermögen bei Investition A, Investition B und der Unterlassung (in dieser Reihenfolge).*

*Aufgabe 5* Bestimmen Sie die Zeitpräferenzrate eines Investors in einem Modell mit zwei Zeitpunkten und folgender Nutzenfunktion:

$$U(C_0, C_1) = C_0^{\frac{3}{5}} \cdot C_1^{\frac{2}{5}}$$

Eine Erstausstattung in Höhe von $\bar{C_0}$ ist gegeben, $X_0$ entspricht der Ersparnis und $i$ dem Zinssatz, so dass $\bar{C_0} = C_0 + X_0$ und $C_1 = (1 + i) \cdot X_0$ gilt.

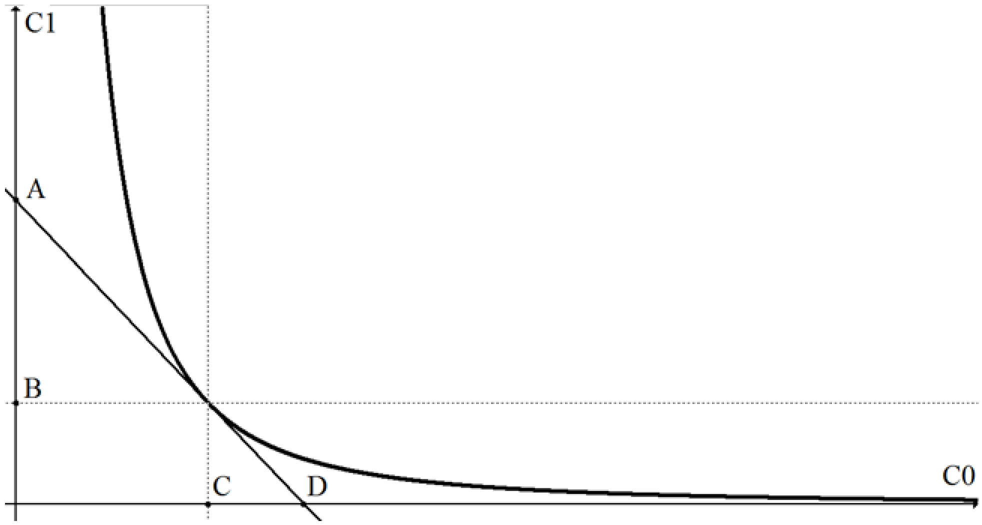
*a)* Stellen Sie dafür zunächst die Lagrangefunktion auf.

*b)* Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bedingungen erster Ordnung her.

*c)* Stellen Sie sie nun entsprechend der Zeitpräferenzrate um.

*d)* Bestimmen Sie die Gleichung für die Erstausstattung $\bar{C_0}$ des Investors.

*Aufgabe 6* Sie sehen nun das Fisher-Modell in grafischer Form.




Nehmen Sie an, dass die optimalen Konsummengen schon errechnet wurden. Es sei $C_0 = 100$, $C_1 = 100$ und der Zins ist $i = 0{,}5$.

*a)* Errechnen Sie mit Hilfe oben gegebener Parameter den maximalen Konsum in $t = 1$, wenn in $t = 0$ nichts konsumiert wird. Welcher Punkt in der Grafik gehört dazu?

*b)* Ermitteln Sie den maximalen Konsum in $t = 0$, wenn in $t = 1$ nichts konsumiert wird. Welcher Punkt in der Grafik gehört dazu?

## Set 4

*Aufgabe 1* Die in einem Jahr fälligen Cashflows eines Projektes sind in Abbildung 2 dargestellt. Ein Investor ist der Meinung, dass beide Zustände mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten eintreten können. Der risikolose Zinssatz beträgt 10%.

*a)* Berechnen Sie den Projektwert $V^{\text{risikoneutral}}$, wenn der Investor risikoneutral ist.

*b)* Der Investor sei nun risikoscheu. Nehmen Sie an, dass die Nutzenfunktion des Investors $\ln(\cdot)$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe des Sicherheitsäquivalentes den fairen Wert des Projekts $V^{\text{fair}}$.

*c)* Unterstellen Sie nun, dass der Investor die Methode der Kapitalkosten verwendet. Wie hoch müssen die Kapitalkosten $k$ sein, damit man auf den gleichen fairen Wert gelangt?

*d)* Jetzt will der Investor die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $q(\text{auf})$ und $q(\text{ab}) = 1 - q(\text{auf})$ verwenden. Wie hoch müssen diese sein?

*Anmerkung: Geben Sie in github folgende Zahlenwerte ein:*

$V^{\text{risikoneutral}}$ (in € ) $V^{\text{fair}}$ (in € ) $k$ (in %) $q(\text{auf})$ (in %)

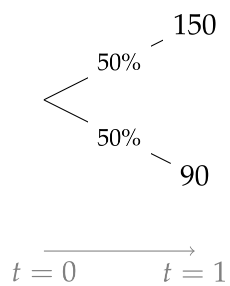



*Abbildung 2:* Unsichere Cashflows des Projektes in Set 4, Aufgabe 1

*Aufgabe 2* Wieder sind die in einem Jahr fälligen Cashflows eines Projektes in Abbildung 2 abgebildet. Wieder können beide Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten und der risikolose Zinssatz beträgt 10%.

*a)* Der Investor sei risikoscheu. Nehmen Sie an, dass die Nutzenfunktion des Investors $\sqrt{\cdot}$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe des Sicherheitsäquivalentes den fairen Wert des Projekts $V^{\text{fair}}$.

*b)* Unterstellen Sie nun, dass der Investor die Methode der Kapitalkosten verwendet. Wie hoch müssen die Kapitalkosten $k$ sein, damit man auf den gleichen fairen Wert gelangt?

*c)* Jetzt will der Investor die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $q(\text{auf})$ und $q(\text{ab}) = 1 - q(\text{auf})$ verwenden. Wie hoch müssen diese sein?

*Anmerkung: Geben Sie in github folgende Zahlenwerte ein:*

$V^{\text{fair}}$ (in € ) $k$ (in %) $q(\text{auf})$ (in %)

*Aufgabe 3* Betrachten Sie folgende Investition

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Investition | -1.500 | 800 | 600 | 100 | 200 |

Wie hoch ist der interne Zins der Investition?

*Anmerkung: Vermutlich benötigen Sie wieder ein Näherungsverfahren. Wenn Sie möchten können Sie zum besseren späteren Abgleich Ihrer Lösung mit den Startwerten 0% und 10% beginnen.*

*Aufgabe 4* Betrachten Sie die beiden Investitionen A und B aus Set 3, Aufgabe 4 (siehe Abbildung 1) sowie eine Unterlassungsalternative. Ermitteln Sie die drei zugehörigen internen Zinssätze.

*Anmerkung: Vermutlich benötigen Sie wieder ein Näherungsverfahren. Wenn Sie möchten können Sie zum besseren späteren Abgleich Ihrer Lösung mit github mit den Startwerten 0% und 10% beginnen.*

# ZUSÄTZLICHE ÜBUNGSAUFGABEN

## ZUSÄTZLICHES SET 1

*Aufgabe 1* Welchen Betrag müssen Sie heute zur Bank bringen, damit Sie in 5 Jahren 15.000€ abheben können? Der Zinssatz beträgt 4,5%.

*Aufgabe 2* Bei welchem Zinssatz bekommen Sie in 35 Jahren das 5-fache der heutigen Anlage? Bitte tragen Sie einen Prozentsatz ein (6% statt 0.06).

*Aufgabe 3* Wie hoch muss der Jahreszins sein, damit Sie mit Ihrer heutigen Anlage in Höhe von 5.000€ in 10 Jahren ein Endkapital von 9.000€ erreichen? Bitte tragen Sie einen Prozentsatz ein (6% statt 0.06).

*Aufgabe 4* In wie viel Jahren verdreifacht sich Ihr Betrag von 5.000€ bei 7,65% Zinssatz?

*Aufgabe 5* Zum Kauf eines Autos erhalten Sie einen Kredit in Höhe von 25.000€, für den Sie nach 17 Jahren einschließlich Zins und Zinseszins 59.664,47€ zurückzahlen müssen. Wie groß ist der Zinssatz?

*Aufgabe 6* Wie viel Geld muss ein 30-jähriger Angestellter am Anfang seines Berufslebens anlegen, wenn er an seinem 65. Geburtstag über 50.000€ verfügen soll und der Jahreszins 6,5% p.a. beträgt?

*Aufgabe 7* Sie gewinnen im Lotto 1.000.000€. Da Sie ein vorausschauender Mensch sind, wollen Sie möglichst schonend mit diesem Vermögenszuwachs umgehen und ihn gleichmäßig über die Zeit von 30 Jahren verteilen. Sie zahlen die Summe bei einer Rentenversicherung ein und vereinbaren mit dieser eine jährliche Verzinsung von 5% sowie eine jeweils zum Jahresende erfolgende Auszahlung einer Rente. Das gesamte Geld soll nach 30 Jahren aufgebraucht sein. Wie hoch ist die nachschüssige Rente?

*Aufgabe 8* Herr Schulze schuldet Herrn Schmidt einen bestimmten Geldbetrag. Herr Schulze bietet Herrn Schmidt an, dass er 5 jährliche Raten von 12.000€ zu zahlen hat. Die Zahlungen sollen jeweils am Jahresende erfolgen. Welche einmalige Sofortzahlung könnte Herrn Schulze heute schuldenfrei machen, wenn der Zinssatz 8% beträgt?

*Aufgabe 9* Sam Fröhlich beschließt, seinem eben geborenen Enkel ab dem ersten Geburtstag bis zu dem zwanzigsten Geburtstag jährlich 500€ auf ein Konto einzuzahlen. Die Zahlungen erfolgen am Jahresende. Sam Fröhlich geht davon aus, dass der Zinssatz 5% beträgt. Wie hoch ist die äquivalente sofortige einmalige Zahlung heute?

*Aufgabe 10* Student Max hat das von seinem verstorbenen Onkel erhaltene Erbe auf sein Konto eingezahlt, was ihm 30 Jahre lang eine jährliche Rente in Höhe von 100.000€ ermöglicht. Nach 30 Jahren soll von dem Geld nichts mehr übrig sein. Wie hoch ist das Erbe? Der Zinssatz beträgt 8%.

*Aufgabe 11* Während des 5-jährigen Studiums seines Sohnes hat der Unternehmer M. auf dessen Konto jährlich 2.500€ eingezahlt. Am Ende des Studiums besitzt der Sohn 16.450€. Wie groß ist der Zinssatz?
Hinweis: Beginnen Sie für einen einfacheren Abgleich Ihrer Lösungen am besten mit den Startwerten 10% und 15%.

*Anmerkung: Sie werden es nicht schaffen, hier eine Formel für den Zinssatz zu erhalten. Die Aufgabe muss näherungsweise gelöst werden. Dazu erhalten Sie jetzt einen Hinweis, der Ihnen behilflich sein kann.*
*Wenn Sie die Nullstelle einer Funktion*

$$f(i) = 0$$

*näherungsweise bestimmen wollen (Sie müssen natürlich zuerst herausbekommen, wie* $f(i)$ *auszusehen hat!), dann kann man eine Näherungsformel nutzen. Zu zwei Werten* $i_0$ *und* $i_1$*, für die* $f(i_0)$ *und* $f(i_1)$ *unterschiedliche Vorzeichen aufweisen, wählt man einen nächsten Wert* $i_2$ *dergestalt, dass*

$$i_2 = \frac{i_1 \cdot f(i_0) - i_o \cdot f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}$$

[2] *Der neue Wert* $i_2$ *ersetzt nun je nach Situation eine der beiden Startwerte:*

$f(i_2) = 0$ *In diesem Fall haben wir die Nullstelle gefunden.*

$f(i_2) < 0$ *In diesem Fall ersetzen wir* $i_1$ *durch* $i_2$*, lassen* $i_0$ *unverändert und starten das Verfahren erneut.*

$f(i_2) > 0$ *In diesem Fall ersetzen wir* $i_0$ *durch* $i_2$*, lassen* $i_1$ *unverändert und starten das Verfahren erneut.*

*Dieses Verfahren wird hier sehr schnell konvergieren, sechs Iterationen sollten reichen.*

2. Sie finden in der Formelsammlung auf der Webseite und in den Vorlesungen weitere Hinweise.

## Zusätzliches Set 2

*Aufgabe 1* Herr P. ist froh, dass er mit seiner Bank die Finanzierung seines Einfamilienhauses unter Dach und Fach gebracht hat. Der Finanzierungsplan sieht vor, dass die Bank P. einen Kredit in Höhe von 300.000€ einräumt, der über 6 Jahre in gleichbleibenden Raten zu tilgen ist. Es wurde ein Zinssatz von 6% vereinbart. Stellen Sie den vollständigen Tilgungsplan auf und geben Sie die Annuitäten der Jahre 1 bis 6 an.

*Hinweis: Die Lösung wird in Tabellenform eingegeben. Die Spaltenüberschriften wählen Sie dabei wie folgt*

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|

*Geben Sie bitte die Tabelle ohne die Spalte mit den Zeitpunkten und ohne die Kopfzeile ein.*

*Aufgabe 2* Als Alternative bietet die Bank Herrn P. einen Kredit, der annuitätisch getilgt werden soll und im gleichen Zeitraum zurückzuzahlen ist. Stellen Sie erneut einen vollständigen Tilgungsplan auf.

*Hinweis: Die Lösung wird wieder in Tabellenform eingegeben. Die Spaltenüberschriften wählen Sie dabei wie folgt*

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|

*Aufgabe 3* Nach dem von ihm verursachten Autounfall muss Herr S. Herrn U. auf unbegrenzte Zeit eine Rente von 2.420€ zahlen. Mit welcher Einmalzahlung könnte sich S. von dieser Verpflichtung befreien, wenn der Zins 11% beträgt?

*Aufgabe 4* Kurz nach N. zwanzigstem Geburtstag stirbt Onkel T. und hinterlässt N. 50.000€. N. legt dieses Geld zu 8% an. Dabei will N. nach Ablauf von 4 Jahren 5 Jahre lang einen jährlich gleichen Betrag abheben, um auf dieser Weise sein Studium zu finanzieren. Das ganze Geld soll nach der letzten Abhebung aufgebraucht sein. Wie hoch ist die jährliche Rente?

*Aufgabe 5* Ein Kredit über 240.000€ soll bei einem Zinssatz von 4% annuitätisch getilgt werden. Die Laufzeit beträgt zwölf Jahre, wovon die ersten fünf tilgungsfrei sind. Wie hoch ist die Annuität der Jahre sechs bis zwölf?

*Aufgabe 6* Der französische Hotelier R. hat unter den Bedingungen eines unvollkommenen und unbeschränkten Marktes die Wahl zwischen zwei Anlagen, die er bauen kann. Rene erwartet folgende Zahlungen (in Mio€):

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Anlage 1 | -5 | 2 | 10 | 5 |
| Anlage 2 | -7 | 10 | 5 | 6 |

R. besitzt in $t = 0$ ein Startguthaben in Höhe von 6 Mio€. Er wünscht in den Zeitpunkten $t = 1$, $t = 2$ und $t = 3$ Entnahmen in Höhe von 80.000€ und ist im übrigen an einem möglichst hohen Endvermögen interessiert. Welches Projekt verdient den Vorzug, wenn man finanzielle Überschüsse zu 12% anlegen und Defizite zu einem Zins von 20% decken kann?

*Für github gilt: Geben Sie das Endvermögen der Projekte A und B (in Mio. Euro und in dieser Reihenfolge) an.*

*Aufgabe 7* N. will 3 Mio€ netto innerhalb von 4 Jahren besitzen. Wie viel Geld müsste er jährlich *brutto* verdienen, wenn er rund 60.000€ im Jahr netto ausgeben will, den Rest auf sein Bankkonto einzahlt, das ihm 1,5% p. a. Verzinsung (netto) bringt und der Steuersatz auf sein Einkommen 47% beträgt?

## Zusätzliches Set 3

*Aufgabe 1* Sie wissen, dass ein Kredit über acht Jahre mit einer Annutität von 2.007,355 und einem Zins von 12,5% getilgt wurde. Wie hoch war der Kreditbetrag?

*Aufgabe 2* Es liegt der folgende unvollständige Tilgungsplan für eine annuitätische Tilgung vor:

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 260 | 1.530,69 | |
| 2 | | | 1.591,92 | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

Vervollständigen Sie den Tilgungsplan.

*Geben Sie bitte die Tabelle ohne die Spalte mit den Zeitpunkten und ohne die Kopfzeile ein.*

*Aufgabe 3* Der Vorstand der H AG legt dem Aufsichtsrat drei alternative Investitionspläne vor, die in den kommenden 5 Jahren folgende Zahlungen erwarten lassen.

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Investition A | -2.500 | 200 | 500 | 800 | 1.200 | 790 |
| Investition B | -3.650 | 200 | 400 | -800 | 1600 | 3200 |
| Investition C | -3.000 | 1.500 | -300 | 600 | 500 | 400 |

Der Kapitalmarkt sei unvollkommen. Gleichgültig, ob Investitionen durchgeführt werden oder nicht, fallen in den Zeitpunkten $t = 0$ bis $t = 5$ Basiszahlungen an, die, genauso wie die Zinssätze, welche für Geldanlagen bzw. Kredite erwartet werden, sich aus der nachstehenden Tabelle ergeben.

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basiszahlungen | 830 | 580 | -460 | 640 | 900 | 750 |
| Habenzins | 6% | 7% | 4% | 6% | 10% | |
| Sollzins | 12% | 15% | 15% | 10% | 11% | |

Sofort und danach am Ende jedes Jahres $t$ werden Entnahmen $C_t$ gewünscht, die mit 75€ beginnen und dann ansteigen. Diese Zahlungen sollen sich in den einzelnen Jahren wie 1 zu 1.1 zu 1.4 zu 1.5 zu 1.9 verhalten, im letzten Jahr erfolgt keine Entnahme:

$$C_0 : C_1 : C_2 : C_3 : C_4 : C_5 = 1 : 1.1 : 1.4 : 1.5 : 1.9 : 0\,.$$

Es kann ein Kredit im Umfang von höchstens 3.000€ aufgenommen werden. Berechnen Sie die Endwerte aller finanzierbaren Alternativen mit Hilfe vollständiger Finanzpläne. Welches Projekt ist unter den vorliegenden Bedingungen am günstigsten?

*Für github gilt: Ermitteln Sie die Endvermögen bei Investition A, Investition B, Investition C und der Unterlassung (in dieser Reihenfolge). Wenn ein Projekt nicht durchgeführt werden kann, tragen Sie bitte statt des Endvermögens "0" ein.*

*Aufgabe 4* Unternehmer D. entscheidet unter den Bedingungen eines unvollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarktes, in welche Immobilie er investieren soll. Dabei hat er zwischen den Projekten A und B zu wählen und besitzt folgende Informationen:

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Basiszahlungen | 1.000 | -300 | 200 | 600 | 800 |
| Investition A | -6.000 | 100 | 200 | 6.000 | 2.800 |
| Investition B | -5.000 | 1.800 | 1.000 | 0 | 4.700 |
| Habenzins | 6% | 7% | 8% | 7% | |
| Sollzins | 11% | 10% | 10% | 12% | |

Der Investor benötigt ab dem Jahre $t = 0$ Entnahmen auf dem Niveau von 100, die Entnahmen sollen in jedem Jahr um 20% gegenüber dem Vorjahr steigen. Er ist im Übrigen an einer Endvermögensmaximierung interessiert. Welches Projekt soll der Investor wählen?

*Für github gilt: Ermitteln Sie die Endvermögen bei Investition A, Investition B und der Unterlassung (in dieser Reihenfolge).*

## Zusätzliches Set 4

*Aufgabe 1* Die in einem Jahr fälligen Cashflows eines Projektes sind in Abbildung 3 dargestellt. Ein Investor ist der Meinung, dass beide Zustände mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten eintreten können. Der risikolose Zinssatz beträgt 10%.

*a)* Berechnen Sie den Projektwert $V^{\text{risikoneutral}}$, wenn der Investor risikoneutral ist.

*b)* Der Investor sei nun risikoscheu. Nehmen Sie an, dass die Nutzenfunktion des Investors $\ln(\cdot)$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe des Sicherheitsäquivalentes den fairen Wert des Projekts $V^{\text{fair}}$.

*c)* Unterstellen Sie nun, dass der Investor die Methode der Kapitalkosten verwendet. Wie hoch müssen die Kapitalkosten $k$ sein, damit man auf den gleichen fairen Wert gelangt?

*d)* Jetzt will der Investor die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $q(\text{auf})$ und $q(\text{ab}) = 1 - q(\text{auf})$ verwenden. Wie hoch müssen diese sein?

| $V^{\text{risikoneutral}}$ (in €) | $V^{\text{fair}}$ (in €) | $k$ (in %) | $q(\text{auf})$ (in %) |
|---|---|---|---|

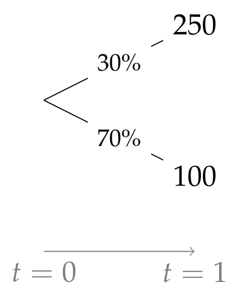



*Abbildung 3:* Unsichere Cashflows des Projektes in Set 4, Aufgabe 1

*Aufgabe 2* Wieder sind die in einem Jahr fälligen Cashflows eines Projektes in Abbildung 3 abgebildet. Wieder können beide Zustände mit den angegebenen Wahrscheinlichkeit eintreten und der risikolose Zinssatz beträgt 10%.

*a)* Der Investor sei risikoscheu. Nehmen Sie an, dass die Nutzenfunktion des Investors $\sqrt{\cdot}$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe des Sicherheitsäquivalentes den fairen Wert des Projekts $V^{\text{fair}}$.

*b)* Unterstellen Sie nun, dass der Investor die Methode der Kapitalkosten verwendet. Wie hoch müssen die Kapitalkosten $k$ sein, damit man auf den gleichen fairen Wert gelangt?

*c)* Jetzt will der Investor die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $q(\text{auf})$ und $q(\text{ab}) = 1 - q(\text{auf})$ verwenden. Wie hoch müssen diese sein?

| $V^{\text{fair}}$ (in €) | $k$ (in %) | $q(\text{auf})$ (in %) |
|---|---|---|

*Aufgabe 3* Betrachten Sie folgende Investition

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Investition | -1.000 | 600 | 600 | 0 | 100 |

Wie hoch ist der interne Zins der Investition?

*Anmerkung: Vermutlich benötigen Sie wieder ein Näherungsverfahren.*

*Aufgabe 4* Betrachten Sie die beiden Investitionen A und B aus Set 3, Aufgabe 4 (siehe Abbildung ) sowie eine Unterlassungsalternative. Ermitteln Sie die drei zugehörigen internen Zinssätze.

*Anmerkung: Vermutlich benötigen Sie wieder das Näherungsverfahren.*

# Musterlösungen Übungsaufgaben

## Set 1

*Aufgabe 1*

$$K_0 = \frac{10.000}{(1+0.04)^6} = 7.903{,}14$$

*Aufgabe 2* Geldbetrag $= x$ setzen.

$$\begin{aligned} x \cdot (1+i)^{20} &= 3x \\ (1+i)^{20} &= 3 \\ i &= \sqrt[20]{3} - 1 = 5{,}6467\% \end{aligned}$$

*Aufgabe 3*

$$\begin{aligned} 3000 \cdot (1+i)^7 &= 5000 \\ (1+i)^7 &= \frac{5000}{3000} \\ i &= \sqrt[7]{\frac{5.000}{3.000}} - 1 = 7.5704\% \end{aligned}$$

*Aufgabe 4*

$$\begin{aligned} 15.000 \times (1+0{,}065)^n &= 2 \times 15.000 \\ (1+0{,}065)^n &= 2 \\ n \ln(1+0{,}065) &= \ln 2 \\ n &= \frac{\ln(2)}{\ln(1+0{,}065)} = 11{,}007 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

*Aufgabe 5*

$$\begin{aligned} 15.500 \times (1+i)^{13} &= 35.146{,}06 \\ i &= \sqrt[13]{\frac{35.146{,}06}{15.500}} = 6{,}5\% \end{aligned}$$

*Aufgabe 6*

$$K_0 = \frac{20.000}{(1+0{,}055)^{18}} = 7.629{,}32$$

*Aufgabe 7*

$$r = 18.770{,}15 \frac{0{,}04 \cdot (1+0{,}04)^{12}}{(1+0{,}04)^{12} - 1} = 2.000$$

*Aufgabe 8*

$$R_0 = 700 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05 \cdot (1+0{,}05)^{10}} = 5.405{,}21$$

*Aufgabe 9*

$$R_0 = 1.000 \, \frac{(1+0{,}04)^{25} - 1}{0{,}04 \cdot (1+0{,}04)^{25}} = 15.622{,}08$$

*Aufgabe 10*

$$R_0 = 55.000 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^{20}} = 630.845{,}67$$

*Aufgabe 11* Wir starten mit $i = 0\%$ und $i = 10\%$. Die Vorzeichen von $f(i) = R_n(i) - 27.712{,}91$ sind unterschiedlich. Es ergeben sich schrittweise folgende Werte

| k (Schritt) | $i_k$ | $f(i_k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1% | -4513,03242 |
| 2 | 10% | 4307,57668 |
| 3 | 5,604817% | -390,06119 |
| 4 | 5,969764% | -30,05835 |
| 5 | 5,997693% | -2,29500 |
| 6 | 5,999824% | -0,17510 |
| 7 | 5,999986% | 0,01336 |

*Abbildung 4:* Lösung Set 1, Aufgabe 11

## Set 2

*Aufgabe 1* $R_0 = \frac{1.800}{0,08} = 22.500$

*Aufgabe 2* Es gilt

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 180.000 | 12.600 | 36.000 | 48.600 |
| 2 | 144.000 | 10.080 | 36.000 | 46.080 |
| 3 | 108.000 | 7.560 | 36.000 | 43.560 |
| 4 | 72.000 | 5.040 | 36.000 | 41.040 |
| 5 | 36.000 | 2.520 | 36.000 | 38.520 |

*Aufgabe 3* Es gilt

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 180.000 | 12.600 | 31.300,32 | 43.900,32 |
| 2 | 148.699,68 | 10.408,98 | 33.491,35 | 43.900,32 |
| 3 | 115.208,33 | 8.064,58 | 35.835,74 | 43.900,32 |
| 4 | 79.372,59 | 5.556,08 | 38.344,24 | 43.900,32 |
| 5 | 41.028,34 | 2.871,98 | 41.028,34 | 43.900,32 |

*Aufgabe 4* zuerst $K_8 = 200.000 \cdot 1{,}04^8 = 273.713{,}81$, dann Rente $r = R_0 \frac{iq^n}{q^n - 1} = 273.713{,}81 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 1{,}04^{12}}{1{,}04^{12} - 1} = 29.164{,}80$

*Aufgabe 5* Man nimmt in den ersten 4 Jahren keine Tilgung vor, zahlt aber die Zinsen. Tilgungsplan Abbildung 5.

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 100.000 | 8.000 | 0 | 8.000 |
| 2 | 100.000 | 8.000 | 0 | 8.000 |
| 3 | 100.000 | 8.000 | 0 | 8.000 |
| 4 | 100.000 | 8.000 | 0 | 8.000 |
| 5 | 100.000 | 8.000 | 13.631,54 | 21.631,54 |
| 6 | 86.368,46 | 6.909,48 | 14.722,06 | 21.631,54 |
| 7 | 71.646,40 | 5.731,71 | 15.899,83 | 21.631,54 |
| 8 | 55.746,57 | 4.459,73 | 17.171,81 | 21.631,54 |
| 9 | 38.574,76 | 3.085,98 | 18.545,56 | 21.631,54 |
| 10 | 20.029,20 | 1.602,34 | 20.029,20 | 21.631,54 |

*Abbildung 5:* Lösung Set 2, Aufgabe 5

*Aufgabe 6* Projekt B ist besser:

| | Zeitpunkte | | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Projekt A | Basiszahlungen | $M_t$ | 1.000 | | |
| | Entnahmen | $C_t$ | 0 | 50 | 50 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –900 | 0 | 1.700 |
| | Zinsen | $Z_t$ | 0 | $100 \cdot 15\% = 15$ | $65 \cdot 15\% = 9{,}75$ |
| | Kontostand | $K_t$ | 100 | $100 - 50 + 15 = 65$ | 1.724,75 |
| Projekt B | Basiszahlungen | $M_t$ | 1.000 | | |
| | Entnahmen | $C_t$ | 0 | 50 | 50 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –1.300 | 2.000 | |
| | Zinsen | $Z_t$ | 0 | $-300 \cdot 25\% = -75$ | $1.575 \cdot 15\% = 236{,}25$ |
| | Kontostand | $K_t$ | –300 | 1.575 | **1.761,25** |

*Aufgabe 7* Wir verwenden die NPV-Gleichung mit Steuern

$$NPV^s = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t - s(CF_t - AfA)}{(1+i(1-s))^t}.$$

Wir erhalten zuerst für die Abschreibungen des ersten Projektes $AfA(A) = 450$ sowie $AfA(B) = 650$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} NPV^s(A) &= -900 + \frac{33\% \cdot 450}{(1+20\%(1-33\%))} + \frac{1700 - 33\% \cdot (1700-450)}{(1+20\%(1-33\%))^2} \\ &\approx 232{,}15 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} NPV^s(B) &= -1300 + \frac{2000 - 33\% \cdot (2000-650)}{(1+20\%(1-33\%))} + \frac{33\% \cdot 650}{(1+20\%(1-33\%))^2} \\ &\approx 237{,}61 \end{aligned}$$

## Set 3

*Aufgabe 1* Kredit $\times$ Annuitätenfaktor $=$ Annuität $\quad\rightarrow\quad$ Kredit $= \frac{100.000}{\frac{1{,}05^5\cdot 0{,}05}{1{,}05^5-1}} = 432.947{,}67$

*Aufgabe 2* Abfolge: zuerst Annuität aus ersten Zeile, diese ist überall Annuität

daraus Zinszahlung in $t = 2$ berechenbar ($Z_2 = A_2 - T_2$)

Differenz der Restschulden von 0 nach 1 betrug gerade Tilgung von 865.127,42; diese Differenz hatte weniger Zinsen in Höhe von $362.500 - 299.778{,}26 = 62721{,}74$ zur Folge. Macht einen Zinssatz von

$$\frac{62721{,}74}{865.127{,}42} = 7{,}25\%$$

Die Annuitäten mit 7,25% diskontiert ergeben dann den Kreditbetrag $K_0$, der Rest ist Standard. Siehe Abbildung 6.

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.000.000 | 362.500,00 | 865.127,42 | 1.227.627,42 |
| 2 | 4.134.872,58 | 299.778,26 | 927.849,16 | 1.227.627,42 |
| 3 | 3.207.023,42 | 232.509,20 | 995.118,22 | 1.227.627,42 |
| 4 | 2.211.905,20 | 160.363,13 | 1.067.264,29 | 1.227.627,42 |
| 5 | 1.144.640,91 | 82.986,47 | 1.144.640,95 | 1.227.627,42 |

*Abbildung 6:* Lösung Set 3, Aufgabe 2

*Aufgabe 3* Investition B ist am vorteilhaftesten, C kann nicht durchgeführt werden. Siehe Abbildung 7.

*Aufgabe 4* Siehe Abbildung 8.

*Aufgabe 5* *a)*

$$L = C_0^{\frac{3}{5}} \cdot C_1^{\frac{2}{5}} - \lambda\big(C_1 - (1+i)\cdot(\bar{C}_0 - C_0)\big).$$

*b)*

$$\frac{\partial L}{\partial C_0} = \frac{3}{5}C_0^{\frac{-2}{5}} \cdot C_1^{\frac{2}{5}} - \lambda\cdot(1+i) = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \frac{2}{5}C_0^{\frac{3}{5}} \cdot C_1^{\frac{-3}{5}} - \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C_1 - (1+i)\cdot(\bar{C}_0 - C_0) = 0.$$

*c)*

$$-(1+i) = -\frac{\frac{3}{5}C_0^{\frac{-2}{5}} \cdot C_1^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}C_0^{\frac{3}{5}} \cdot C_1^{\frac{-3}{5}}}.$$

| | Zeitpunkte | | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Projekt A | Basiszahlungen | $M_t$ | 500 | 130 | –140 | 150 | 30 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 70 | 84 | 91 | 105 | 11 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –1.000 | 750 | 280 | 200 | –3 |
| | Habenzinssatz t bis t+1 | $i_t^H$ | 7% | 6% | 5% | 5% | |
| | Sollzinssatz t bis t+1 | $i_t^S$ | 11% | 10% | 10% | 9% | |
| | Zinsen | $Z_t$ | | –62,7 | 9,798 | 11,1049 | 23,9104 |
| | Kontostand | $K_t$ | –570 | 163,3 | 222,098 | 478,2029 | 660,1133 |
| Projekt B | Basiszahlungen | $M_t$ | 500 | 130 | –140 | 150 | 30 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 70 | 84 | 91 | 105 | 11 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –800 | 330 | 530 | -50 | 20 |
| | Habenzinssatz t bis t+1 | $i_t^H$ | 7% | 6% | 5% | 5% | |
| | Sollzinssatz t bis t+1 | $i_t^S$ | 11% | 10% | 10% | 9% | |
| | Zinsen | $Z_t$ | | –40,7 | –3,47 | 13,0415 | 13,44357 |
| | Kontostand | $K_t$ | –370 | –34,7 | 260,83 | 268,8715 | **670,31507** |
| Projekt C | Basiszahlungen | $M_t$ | 500 | 130 | –140 | 150 | 30 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 70 | 84 | 91 | 105 | 11 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –950 | 0 | 0 | 560 | 79 |
| | Zinsen | $Z_t$ | | –57,2 | –53,12 | –81,532 | –26,2666 |
| | Kontostand | $K_t$ | –520 | –531,2 | **–815,32!!** | –291,852 | 664,8813 |
| Unterlassung | Basiszahlungen | $M_t$ | 500 | 130 | –140 | 150 | 30 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 70 | 84 | 91 | 105 | 11 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | [illegible] |
| | Zinsen | $Z_t$ | | 30,1 | 30,366 | 15,2733 | 18,28696 |
| | Kontostand | $K_t$ | 430 | 506,1 | 305,466 | 365,7393 | 572,02626 |

*Abbildung 7:* Lösung Set 3, Aufgabe 3

*d)* $\bar{C}_0 = \frac{C_1}{(1+i)} + C_0$

*Aufgabe 6 a)*

$$(1+i) \cdot \bar{C}_0 = 250.$$

Punkt A auf der Grafik.

*b)* $\bar{C}_0 = 166{,}67$ Punkt D auf der Grafik.

| | Zeitpunkte | | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Projekt A | Basiszahlungen | $M_t$ | 1.000 | –300 | 200 | 600 | 800 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 200 | 220 | 242 | 266,2 | 292,82 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –3.000 | 1.000 | 1.100 | 800 | 700 |
| | Habenzinssatz t bis t+1 | $i_t^H$ | 6% | 8% | 8% | 8% | |
| | Sollzinssatz t bis t+1 | $i_t^S$ | 8% | 12% | 12% | 10% | |
| | Zinsen | $Z_t$ | | –176 | –227,52 | –127,8624 | –5,95824 |
| | Kontostand | $K_t$ | –2.200 | –1.896 | –1.065,52 | –59,5824 | 1.141,63936 |
| Projekt B | Basiszahlungen | $M_t$ | 1.000 | –300 | 200 | 600 | 800 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 200 | 220 | 242 | 266,2 | 292,82 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | –4.000 | 2.000 | –800 | 1.500 | 2.100 |
| | Habenzinssatz t bis t+1 | $i_t^H$ | 6% | 8% | 8% | 8% | |
| | Sollzinssatz t bis t+1 | $i_t^S$ | 8% | 12% | 12% | 10% | |
| | Zinsen | $Z_t$ | | –256 | –237,12 | –366,6144 | –158,79344 |
| | Kontostand | $K_t$ | –3.200 | –1.976 | –3.055,12 | –1.587,9344 | 860,45216 |
| Unterlassung | Basiszahlungen | $M_t$ | 1.000 | –300 | 200 | 600 | 800 |
| | Entnahmen | $C_t$ | 200 | 220 | 242 | 266,2 | 292,82 |
| | Cash–flows | $CF_t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Habenzinssatz t bis t+1 | $i_t^H$ | 6% | 8% | 8% | 8% | |
| | Sollzinssatz t bis t+1 | $i_t^S$ | 8% | 12% | 12% | 10% | |
| | Zinsen | $Z_t$ | | 48 | 26,24 | 24,9792 | 53,681536 |
| | Kontostand | $K_t$ | 800 | 328 | 312,24 | 671,0192 | **1.231,880736** |

*Abbildung 8:* Lösung Set 3, Aufgabe 4

## Set 4

*Aufgabe 1* *a)* Der faire Wert ist

$$V^{\text{fair}} = \frac{\frac{1}{2}150 + \frac{1}{2}90}{1 + 10\%} = 109{,}09$$

*b)* Das Sicherheitsäquivalent und der faire Wert sind dann

$$\frac{1}{2}\ln(150) + \frac{1}{2}\ln(90) = \ln(116{,}19) \quad \Longrightarrow \quad V^{\text{fairer Wert}} = \frac{116{,}19}{1 + 10\%} = 105{,}63.$$

*c)* Die Kapitalkosten sind dann

$$105{,}63 = \frac{\frac{1}{2}150 + \frac{1}{2}90}{1 + k} \quad \Longrightarrow \quad k = 13{,}608\%$$

*d)* Zuletzt ergeben sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten als

$$105{,}63 = \frac{q(\text{auf}) \cdot 150 + (1 - q(\text{auf})) \cdot 90}{1 + 10\%} \quad \Longrightarrow \quad q(\text{auf}) = 43{,}649\%$$

*Aufgabe 2* *a)* Das Sicherheitsäquivalent und der faire Wert sind jetzt

$$\frac{1}{2}\sqrt{150} + \frac{1}{2}\sqrt{90} = \sqrt{118{,}09} \quad \Longrightarrow \quad V^{\text{fairer Wert}} = \frac{118{,}09}{1 + 10\%} = 107{,}36.$$

*b)* Die Kapitalkosten sind dann

$$107{,}36 = \frac{\frac{1}{2}150 + \frac{1}{2}90}{1 + k} \quad \Longrightarrow \quad k = 11{,}775\%$$

*c)* Zuletzt ergeben sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten als

$$107{,}36 = \frac{q(\text{auf}) \cdot 150 + (1 - q(\text{auf})) \cdot 90}{1 + 10\%} \quad \Longrightarrow \quad q(\text{auf}) = 46{,}825\%$$

*Aufgabe 3* Es gilt

$$f(i) = -1500 + \frac{800}{(1+i)^1} + \frac{600}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3} + \frac{200}{(1+i)^4}$$

Mit einem Näherungsverfahren erhält man die Lösung, siehe Abbildung 9.

| Schritt | Zinssatz | NPV |
|---|---|---|
| 0 | 0,000000% | 200 |
| 1 | 10% | -65,12533 |
| 2 | 7,5436% | -7,421405 |
| 3 | 7,2737% | -0,81722 |
| 4 | 7,2441% | -0,0896363 |
| 5 | 7,2409% | -0,010939 |
| 6 | 7,2405% | -0,0011 |

*Abbildung 9:* Lösung Set 4, Aufgabe 3

*Aufgabe 4* Bei der Berechnung des internen Zinses werden nur Zahlungen, die direkt mit der Investition zusammenhängen, berücksichtigt. Das heißt Basiszahlungen sowie Entnahmen werden hier nicht in Betracht gezogen. Die von den Investitionsprojekten A und B (und auch von der Unterlassung, trivialerweise gleich Null) generierten Zahlungen sind in der folgenden Tabelle gegeben:

| Zeitpunkte | | | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Projekt A | Cash–flows | $CF_t$ | –3.000 | 1.000 | 1.100 | 800 | 700 |
| Projekt B | Cash–flows | $CF_t$ | –4.000 | 2.000 | –800 | 1.500 | 2.100 |
| Unterlassung | Cash–flows | $CF_t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nach Def. 2.4 im Skript ist der interne Zinssatz $i$ jener Zinssatz, für den der NPV den Wert null annimmt:

$$\text{NPV} = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t} \stackrel{!}{=} 0$$

Für Investition A muss daher gelten:

$$\text{NPV} = f(i) = -3000 + \frac{1000}{(1+i)^1} + \frac{1100}{(1+i)^2} + \frac{800}{(1+i)^3} + \frac{700}{(1+i)^4} \stackrel{!}{=} 0$$

Mithilfe eines Näherungsverfahrens (hier wurde das Newton-Verfahren benutzt, mehr Hinweise finden Sie in Wikipedia) bekommt man den internen Zinssatz der Investition A von 8,30%:

| k | $i_k$ | $f(i_k) = NPV$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 600 |
| 1 | 0,1 | -102,65692 |
| 2 | 0,085390 | -14,914748 |
| 3 | 0,083319 | -2,11691 |
| 4 | 0,083026 | -0,2988986 |
| 5 | 0,082985 | -0,044353 |
| 6 | **0,082997** | -0,11886 |

Analog beträgt der interne Zinssatz der Investition B 6,96%:

| k | $i_k$ | $f(i_k) = NPV$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 800 |
| 1 | 0,1 | -281,67475 |
| 2 | 0,073959 | -41,798008 |
| 3 | 0,070287 | -5,8943356 |
| 4 | 0,69773 | -0,8254203 |
| 5 | 0,69701 | -0,1145245 |
| 6 | **0,069691** | -0,0157724 |

Die Unterlassungsalternative hat einen internen Zinssatz von Null.

# Musterlösungen Zusatzaufgaben

## Zusätzliches Set 1

*Aufgabe 1*

$$K_0 = \frac{15.000}{(1+0.045)^5} = 12036{,}77$$

*Aufgabe 2*

$$i = \sqrt[35]{5} - 1 = 4{,}7058\%$$

*Aufgabe 3*

$$i = \sqrt[10]{\frac{9.000}{5.000}} - 1 = 6{,}0540\%$$

*Aufgabe 4*

$$n = \frac{\ln(3)}{\ln(1+0{,}0765)} = 14{,}904 \text{ Jahre}$$

*Aufgabe 5*

$$i = \sqrt[17]{\frac{59.664{,}47}{25.000}} - 1 = 5{,}25\%$$

*Aufgabe 6*

$$K_0 = \frac{50.000}{(1+0{,}065)^{35}} = 5.517{,}39$$

*Aufgabe 7*

$$r = 1.000.000\frac{0{,}05 \cdot (1+0{,}05)^{30}}{(1+0{,}05)^{30} - 1} = 65.051{,}44$$

*Aufgabe 8*

$$R_0 = 12.000 \cdot \frac{(1+0{,}08)^5 - 1}{0{,}08 \cdot (1+0{,}08)^5} = 47.913$$

*Aufgabe 9*

$$R_0 = 500\,\frac{(1+0{,}05)^{20} - 1}{0{,}05 \cdot (1+0{,}05)^{20}} = 6.231{,}105$$

*Aufgabe 10*

$$R_0 = 100.000 \cdot \frac{1{,}08^{30} - 1}{0{,}08 \cdot 1{,}08^{30}} = 1.125.778{,}3$$

*Aufgabe 11* Der Zinssatz ist 13,7698%.

Die Funktion $f(i)$ ist durch die Bedingung gekennzeichnet, dass der Endwert gleich 16.450 ist (man könnte $i$ durch eine Barwertgleichung bestimmen, das Ergebnis ist das gleiche). Dann gilt

$$f(i) = 2.500 + 2.500(1+i) + 2.500 * (1+i)^2 + 2.500 * (1+i)^3 + 2.500 * (1+i)^4 - 16.450$$

wobei wir als nächsten Zinssatz immer diejenigen nehmen, die neben dem letzten Zinssatz ein anderes Vorzeichen besitzt:

| k | $i_k$ | $f(i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 10% | -1187,25000 |
| 1 | 15% | 405,95310 |
| 2 | 13,7259844% | -14,28474205 |
| 3 | 13,7692908% | -0,163159932 |
| 4 | 13,7697852% | -0,001862482 |

## Zusätzliches Set 2

*Aufgabe 1* Es gilt

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 300.000 | 18.000 | 50.000 | 68.000 |
| 2 | 250.000 | 15.000 | 50.000 | 65.000 |
| 3 | 200.000 | 12.000 | 50.000 | 62.000 |
| 4 | 150.000 | 9.000 | 50.000 | 59.000 |
| 5 | 100.000 | 6.000 | 50.000 | 56.000 |
| 6 | 50.000 | 3.000 | 50.000 | 53.000 |

*Aufgabe 2* Es gilt

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 300.000 | 18.000 | 43.008,79 | 61.008,79 |
| 2 | 256.991,21 | 15.419,47 | 45.589,32 | 61.008,79 |
| 3 | 211.401,89 | 12.684,11 | 48.324,68 | 61.008,79 |
| 4 | 163.077,21 | 9.784,63 | 51.224,16 | 61.008,79 |
| 5 | 111.853,05 | 6.711,18 | 54.297,61 | 61.008,79 |
| 6 | 57.555,44 | 3.453,33 | 57.555,44 | 61.008,79 |

*Aufgabe 3* $R_0 = 22.000$

*Aufgabe 4* zuerst $K_4 = 50.000 \cdot 1{,}08^4 = 68.024{,}45$, dann Rente $r = R_0 \frac{iq^n}{q^n - 1} = 68.024{,}45 \cdot \frac{0{,}08 \cdot 1{,}08^5}{1{,}08^5 - 1} = 17.037{,}16$

*Aufgabe 5* Tilgungsplan

| Jahr | Schuld Jahresbeginn | Zins | Tilgung | Annuität |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 240.000 | 9.600 | 0 | 9.600 |
| 2 | 240.000 | 9.600 | 0 | 9.600 |
| 3 | 240.000 | 9.600 | 0 | 9.600 |
| 4 | 240.000 | 9.600 | 0 | 9.600 |
| 5 | 240.000 | 9.600 | 0 | 9.600 |
| 6 | 240.000 | 9.600 | 30.386,31 | 39.986,31 |
| 7 | 209.613,69 | 8.384,55 | 31.601,76 | 39.986,31 |
| 8 | 178.011,93 | 7.120,48 | 32.865,83 | 39.986,31 |
| 9 | 145.146,1 | 5.805,84 | 34.180,47 | 39.986,31 |
| 10 | 110.965,63 | 4.438,63 | 35.547,68 | 39.986,31 |
| 11 | 75.417,95 | 3.016,72 | 36.969,59 | 39.986,31 |
| 12 | 38.448,36 | 1.537,93 | 38.448,36 | 39.986,31 |

*Aufgabe 6* Anlage 2 ist besser:

| Zeitpunkt | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Basiszahlung | 6 | | | |
| Anlage 1 | -5 | 2 | 10 | 5 |
| Ergänzungsinv. 0 | -1 | 1,12 | 3,4048 | 14,923776 |
| Ergänzungsinv. 1 | | -3,04 | -13,3248 | |
| Entnahme | 0 | 0,08 | 0,08 | 0,08 |
| Endvermögen | | | | 19,843776 |
| Basiszahlung | 6 | | | |
| Anlage 2 | -7 | 10 | 5 | 6 |
| Ergänzungsfin.0 | 1 | -1,2 | 9,7664 | 16,448768 |
| Ergänzungsinv. 1 | | -8,72 | -14,6864 | |
| Entnahme | 0 | 0,08 | 0,08 | 0,08 |
| Endvermögen | | | | 22,368768 |

*Aufgabe 7* Der Rentenendwert ist um Steuern und Ausgaben anzupassen.

$$
\begin{aligned}
R_n &= (r \cdot (1-s) - K) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
\Longrightarrow r &= (R_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} + K) \cdot \frac{1}{(1-s)} = \\
&= (3.000.000 \cdot \frac{0{,}015}{(1+0{,}015)^4 - 1} + 60.000) \cdot \frac{1}{(1-0{,}47)} \\
&= 1.496.857.
\end{aligned}
$$

## ZUSÄTZLICHES SET 3

*Aufgabe 1* Diskontieren der Zahlungen mit 12,5% ergibt 9.800€.

*Aufgabe 2* Abfolge: zuerst Annuität aus ersten Zeile, diese ist überall Annuität

daraus Zinszahlung in $t = 2$ berechenbar

Differenz der Restschulden von 0 nach 1 betrug gerade Tilgung von 1.530,69; diese Differenz hatte weniger Zinsen in Höhe von $260 - 198{,}77 = 61{,}23$ zur Folge. Macht einen Zinssatz von

$$\frac{61{,}23}{1.530{,}69} = 4\%.$$

Die Annuitäten mit 4% diskontiert ergeben dann den Kreditbetrag $K_0$, der Rest ist Standard.

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.500 | 260,00 | 1.530,69 | 1.790,69 |
| 2 | 4.969,31 | 198,77 | 1.591,92 | 1.790,69 |
| 3 | 3.377,39 | 135,096 | 1.655,59 | 1.790,69 |
| 4 | 1.721,8 | 68,87 | 1.721,8 | 1.790,69 |

*Aufgabe 3* Investition A ist am vorteilhaftesten, B kann nicht durchgeführt werden.

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | 830 | 580 | -460 | 640 | 900 | 750 |
| **Investition A** | -2.500 | 200 | 500 | 800 | 1200 | 790 |
| Entnahme | -75 | -82,5 | -105 | -112,5 | -142,5 | 0 |
| Habenzins | 6% | 7% | 4% | 6% | 10% | |
| Sollzins | 12% | 15% | 15% | 10% | 11% | |
| Konto | -1.745 | -1.256,9 | -1.510,44 | -409,5 | 1507,05 | **3.197,755** |

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | 830 | 580 | -460 | 640 | 900 | 750 |
| Investition B | -3.650 | 200 | 400 | -800 | 1.600 | 3.200 |
| Entnahme | -75 | -82,5 | -105 | -112,5 | -142,5 | 0 |
| Konto | -2.895 | -2.544,9 | **-3.091,64** | **-3.827,88!!** | -1.853,17 | 1.892,98 |

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | 830 | 580 | -460 | 640 | 900 | 750 |
| Investition C | -3.000 | 1.500 | -300 | 600 | 500 | 400 |
| Entnahme | -75 | -82,5 | -105 | -112,5 | -142,5 | 0 |
| Konto | -2.245 | -516,9 | -1.459,44 | -550,85 | 651,56 | 1.866,7 |

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | 830 | 580 | -460 | 640 | 900 | 750 |
| Unterlassung | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Entnahme | -75 | -82,5 | -105 | -112,5 | -142,5 | 0 |
| Konto | 755 | 1.297,8 | 823,65 | 1.384,09 | 2.224,64 | 3.197,1 |

*Aufgabe 4*

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| basis | 1.000 | -300 | 200 | 600 | 800 |
| **Investition A** | -6.000 | 100 | 200 | 6.000 | 2.800 |
| Entnahme | -100 | -120 | -144 | -172,8 | -207,36 |
| Habenzins | 6% | 7% | 8% | 7% | |
| Sollzins | 11% | 10% | 10% | 12% | |
| Konto | -5.100 | -5.981 | -6.323,1 | -528,21 | **2801,05** |

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| basis | 1.000 | -300 | 200 | 600 | 800 |
| Investition B | -5.000 | 1.800 | 1.000 | 0 | 4.700 |
| Entnahme | -100 | -120 | -144 | -172,8 | -207,36 |
| Habenzins | 6% | 7% | 8% | 7% | |
| Sollzins | 11% | 10% | 10% | 12% | |
| Konto | -4.100 | -3.171 | -2.432,1 | -2.248,11 | 2.774,76 |

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| basis | 1.000 | -300 | 200 | 600 | 800 |
| **Unterlassung** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Entnahme | -100 | -120 | -144 | -172,8 | -207,36 |
| Habenzins | 6% | 7% | 8% | 7% | |
| Sollzins | 11% | 10% | 10% | 12% | |
| Konto | 900 | 534 | 627,38 | 1104,77 | 1.774,74 |

## Zusätzliches Set 4

*Aufgabe 1 a)* Der faire Wert ist

$$V^{\text{fair}} = \frac{0{,}3 \cdot 250 + 0{,}7 \cdot 100}{1 + 10\%} = 131{,}82$$

*b)* Das Sicherheitsäquivalent und der faire Wert sind dann

$$0{,}3 \ln(250) + 0{,}7 \ln(100) = \ln(131{,}6382) \quad \Longrightarrow \quad V^{\text{fairer Wert}} = \frac{131{,}63822}{1 + 10\%} = 119{,}6$$

*c)* Die Kapitalkosten sind dann

$$119{,}67 = \frac{0{,}3 \cdot 250 + 0{,}7 \cdot 100}{1 + k} \quad \Longrightarrow \quad k = 21{,}165\%$$

*d)* Zuletzt ergeben sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten als

$$119{,}67 = \frac{q(\text{auf}) \cdot 250 + (1 - q(\text{auf})) \cdot 100}{1 + 10\%} \quad \Longrightarrow \quad q(\text{auf}) = 21{,}092\%$$

*Aufgabe 2 a)* Das Sicherheitsäquivalent und der faire Wert sind jetzt

$$0{,}3 \cdot \sqrt{250} + 0{,}7\sqrt{100} = \sqrt{137{,}908} \quad \Longrightarrow \quad V^{\text{fairer Wert}} = \frac{137{,}908}{1 + 10\%} = 125{,}371.$$

*b)* Die Kapitalkosten sind dann

$$125{,}371 = \frac{0{,}3 \cdot 250 + 0{,}7 \cdot 100}{1 + k} \quad \Longrightarrow \quad k = 15{,}657\%$$

*c)* Zuletzt ergeben sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten als

$$125{,}371 = \frac{q(\text{auf}) \cdot 250 + (1 - q(\text{auf})) \cdot 100}{1 + 10\%} \quad \Longrightarrow \quad q(\text{auf}) = 25{,}272\%$$

*Aufgabe 3* Nach Def. 2.4 im Skript ist der interne Zinssatz $i$ jener Zinssatz, für den der NPV den Wert null annimmt:

$$
\begin{aligned}
NPV = f(i) &= -I_0 + \sum_{t=1}^{4} \frac{CF_t}{(1+i)^t} \\
&= -1.000 + \frac{600}{1+i} + \frac{600}{(1+i)^2} + \frac{0}{(1+i)^3} + \frac{100}{(1+i)^4}
\end{aligned}
$$

Über ein Näherungsverfahrens ergibt sich der interne Zinssatz von 17,3293647%.

| k | $i_k$ | $f(i_k)$ |
|---|---:|---:|
| 0 | 1% | 278,33507 |
| 1 | 10% | 109,62366 |
| 2 | 15,8479325% | 20,50912 |
| 3 | 17,1937957% | 1,84512 |
| 4 | 17,3169500% | 0,16871 |
| 5 | 17,3282278% | 0,01545 |
| 6 | 17,3292606% | 0,00141 |

*Aufgabe 4* Bei der Berechnung des internen Zinses werden nur Zahlungen, die direkt mit der Investition zusammenhängen, berücksichtigt. Das heißt Basiszahlungen sowie Entnahmen werden hier nicht in Betracht gezogen. Die von den Investitionsprojekten A und B (und auch von der Unterlassung, trivialerweise) generierten Zahlungen sind in der folgenden Tabelle gegeben:

| Zeitpunkte | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | |
|---|---|---:|---:|---:|---:|---:|
| Projekt A Cash–flows | $CF_t$ | –6.000 | 100 | 200 | 6.000 | 2.800 |
| Projekt B Cash–flows | $CF_t$ | –5.000 | 1.800 | 1.000 | 0 | 4.700 |
| Unterlassung Cash–flows | $CF_t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nach Def. 2.4 im Skript ist der interne Zinssatz $i$ jener Zinssatz, für den der NPV den Wert null annimmt:

$$
\text{NPV} = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t} \stackrel{!}{=} 0
$$

Für Investition A muss daher gelten:

$$
\text{NPV} = f(i) = -6000 + \frac{100}{(1+i)^1} + \frac{200}{(1+i)^2} + \frac{6.000}{(1+i)^3} + \frac{2.800}{(1+i)^4} \stackrel{!}{=} 0
$$

Mithilfe des Näherungserfahrens bekommt man den internen Zinssatz der Investition A von 13,7%.

Analog beträgt der interne Zinssatz der Investition B 15,072%.

Die Unterlassungsalternative hat einen internen Zinssatz von Null.