

Derivate und ihre Bewertung

zeitstetiges Modell

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)



Version vom 27. März 2026

Zur Geschichte

Modellierung Binomialmodell

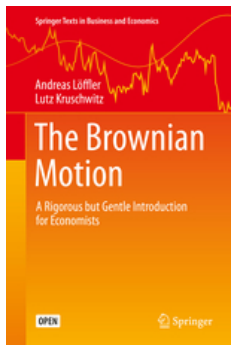
Beweis der Black-Scholes-Gleichung

- ▶ Brownsche Bewegungen gehen auf den Botaniker **Robert Brown** zurück, der sie 1827 in Flüssigkeiten beobachtete.
- ▶ Es war **Albert Einstein**, der 1905 das passende physikalische Modell entwickelte.
- ▶ Die mathematischen Grundlagen legte dann **Norbert Wiener** im Jahr 1923.
- ▶ In die Ökonomie wurde es von **Paul Samuelson** in den 60er Jahren eingeführt.

Heute wird oft etwas verkürzt berichtet, dass Black & Scholes sowie Merton die Väter des Modells sind.

Tabelle: Begriffe beim 2×2 - und Binomialmodell.

Binomialmodell	zeitstetiges Modell
Pfad	stetige Funktionen*
Wahrscheinlichkeit	Maße*
Aktie, Bond	Aktie, Bond
Handelsstrategie	Itô-Integrale*
vollständiger Markt	
arbitragefreier Markt	
Fundamentalsatz	



Heutzutage findet man fast ausschließlich zeitstetige Modelle in der Finanzierung.

Brownsche Bewegung bei BoD (deutsch) und Springer (englisch, open access)

Der logarithmierte Aktienkurs ist normalverteilt mit der **Drift** μ

$$E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] = \mu \cdot T$$

und der **Volatilität** σ

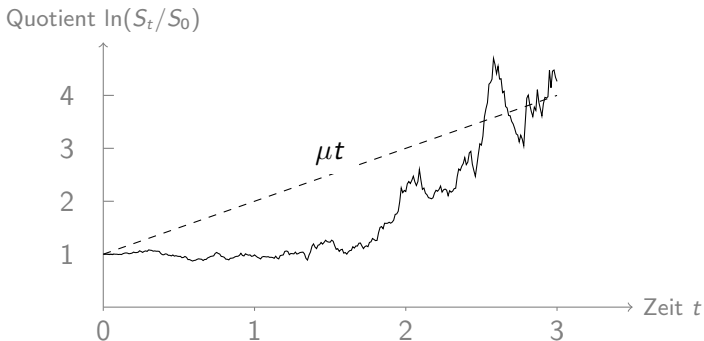
$$\text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] = \sigma^2 \cdot T$$

Äquivalent dazu

$$S_t = S_0 \cdot e^{\mu t + \sqrt{\sigma^2 t} W}$$

für normalverteiltes W .

Abbildung: Beispiel einer chaotischen Preisbewegung (bei Lognormalverteilung).



- ▶ Laufzeit von 0 bis T
- ▶ Die **Periodenlänge wird verkleinert**. Aus T Perioden werden nT Perioden. (Der Abstand zweier Zeitpunkte ist jetzt $\frac{1}{n}$).
- ▶ Dann $n \rightarrow \infty$.
- ▶ Dazu müssen wir aber die Einzelwahrscheinlichkeiten und die Parameter u , d anpassen, sonst wird das Modell unsinnig.

Auf- und Abwärtsbewegung ergeben sich aus

$$u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1, \quad d = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1.$$

oder

$$\ln(1 + u) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \ln(1 + d) = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind

$$p^u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right), \quad p^d = 1 - p^u = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right). \quad (2)$$

Der risikolose Zins ist

$$r_f = e^{\frac{r}{n}} - 1 \quad (3)$$

Erreichen wir so unser Ziel?

◁ 10 ▷

Ja, damit erfüllt die Aktie unsere Bedingungen. Wir beginnen mit dem Erwartungswert,

$$E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] = E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \frac{S_{T-\frac{1}{n}}}{S_{T-\frac{2}{n}}} \cdots \frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right]$$

umstellen

$$= E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right]$$

Eigensch. ln

$$= E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right) \right] + \cdots + E \left[\ln \left(\frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right]$$

Eigensch. EW

$$= nT [p^u \ln(1+u) + (1-p^u) \ln(1+d)]$$

Def. EW

$$= nT \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

siehe (1), (2)

$$= nT \left[\frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = nT \frac{\mu}{n}$$

kürzen, ausrechnen

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \frac{S_{T-\frac{1}{n}}}{S_{T-\frac{2}{n}}} \cdots \frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right] && \text{umstellen} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right] && \text{In} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right) \right] + \cdots + \text{Var} \left[\ln \left(\frac{S_{\frac{1}{n}}}{S_0} \right) \right] && \text{Unabh.} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} nT \left[p^u (\ln(1+u))^2 + (1-p^u) (\ln(1+d))^2 - \left(\frac{\mu}{n} \right)^2 \right] && \text{Def. Var}^1 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} nT \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\mu^2}{n^2} \right] && \text{siehe (1), (2)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} nT \left[\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\mu^2}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sigma^2 T - \mu^2 T \frac{1}{n} \right] = \sigma^2 \cdot T && \text{ausrechnen}
 \end{aligned}$$

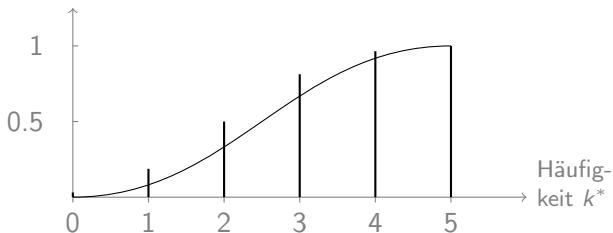
Wir benutzen $\text{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$, wobei $Z = \ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right)$.

Wir wissen $E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_{T-\frac{1}{n}}} \right) \right] = \frac{\mu}{n}$ aus Folie 10. Analog $E[Z^2]$.

Wenn $n \rightarrow \infty$, dann wird aus der Binomial- eine Normalverteilung.
Wie?

Feststellung. Die kumulierte normierte Binomialverteilung $B(k; nT, q)$ geht für $n \rightarrow \infty$ in die normierte Normalverteilung $\mathcal{N}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k-nTq}{\sqrt{nTq(1-q)}})$ über.

Verteilungsfunktionen
 $B(k^*; nT, q), \mathcal{N}(\frac{k^* - nq}{nq(1-q)})$



Satz Parameter des Binomialmodells seien wie gegeben. Für $n \rightarrow \infty$ gelten in der Bewertungsgleichung des Calls

$$C_0 = S_0 \cdot B(k^*; T, \hat{q}^d) - \frac{1}{(1+r_f)^T} K \cdot B(k^*; T, q^d).$$

die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(k^*; nT, \hat{q}^d) = \mathcal{N} \left(\frac{\ln(S_0/K) + rT + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(k^*; nT, q^d) = \mathcal{N} \left(\frac{\ln(S_0/K) + rT - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right).$$

Das ist die **Black-Scholes-Formel** (wenn $(1+r_f)^{-nT} = e^{-rT}$, siehe (3)).

Wir wollen diese Gleichung jetzt “beweisen”.

Call Binomialmodell mit u, r_f, d

$n \rightarrow \infty$

Black–Scholes–Formel mit μ, σ

Dabei konzentrieren wir uns auf den zweiten Term, der erste Grenzwert lässt sich analog zeigen. Wir benötigen mehrere Schritte.

Wir hatten eine Feststellung, wie die Binomialverteilung in eine Normalverteilung übergeht,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(k^*; nT, q^d) = \mathcal{N} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^* - nTq^d}{\sqrt{nTq^d(1 - q^d)}} \right).$$

Wir müssen uns nun um den Elemente im Grenzübergang in der Klammer kümmern.

Wir kennen den Schwellenwert k^* ,

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - nT \ln(1+u)}{\ln(1+d) - \ln(1+u)} && \text{Summationsgrenze bei } nT \text{ Perioden} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - nT \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{-2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} && \text{wegen (1)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\sigma\sqrt{n}}{-2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} && \text{vereinfachen.} \end{aligned}$$

Ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{k^* - nTq^d}{\sqrt{nTq^d(1 - q^d)}} &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\sigma\sqrt{n}}{-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - nTq^d && \text{s.o.} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\sigma\sqrt{n} + nTq^d 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{nTq^d(1 - q^d)}} && \text{erweitern mit } -2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\sigma\sqrt{n} + Tq^d 2\sigma\sqrt{n}}{-2\sigma\sqrt{Tq^d(1 - q^d)}} && \sqrt{n} \text{ kürzen} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\sigma\sqrt{n}(1 - 2q^d)}{-2\sigma\sqrt{Tq^d(1 - q^d)}} && T\sigma\sqrt{n} \text{ ausklammern} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\sigma\sqrt{n}(q^u - q^d)}{2\sigma\sqrt{Tq^d q^u}} && \text{erweitern mit } -1.
 \end{aligned}$$

Die Parameter q^u , q^d und n müssen verschwinden. Dabei schauen wir auf Zähler und Nenner getrennt. Wir verwenden mehrfach die Regel von l'Hospital für unbestimmte Grenzwerte (also Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4)$$

Anmerkung. Woher kommt diese Regel? Man verwendet Taylorregel mit erster Näherung,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(0) + x \cdot f'(0)}{g(0) + x \cdot g'(0)} \underset{f(0)=g(0)=0}{=} \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Wir betrachten nur $\sqrt{n}(q^u - q^d)$, da $T\sigma$ nicht von n abhängig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(q^u - q^d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{(r_f - d) - (u - r_f)}{u - d} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(e^{\frac{r}{n}} - 1) - (e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1) - (e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1)}{\frac{1}{\sqrt{n}} (e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + 1)}$$

siehe (1), (

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2 r} - e^{-x\sigma} - e^{x\sigma}}{x(e^{x\sigma} - e^{-x\sigma})}$$

Substitution $\frac{1}{\sqrt{n}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xre^{x^2 r} + \sigma e^{-x\sigma} - \sigma e^{x\sigma}}{e^{x\sigma} - e^{-x\sigma} + x(\sigma e^{x\sigma} + \sigma e^{-x\sigma})}$$

l'Hospital (

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4re^{x^2 r} + 8x^2 r^2 e^{x^2 r} - \sigma^2 e^{-x\sigma} - \sigma^2 e^{x\sigma}}{\sigma e^{x\sigma} + \sigma e^{-x\sigma} + \sigma e^{x\sigma} + \sigma e^{-x\sigma} + x(\sigma^2 e^{x\sigma} - \sigma^2 e^{-x\sigma})}$$

l'Hospit

$$= \frac{4r + 0 - \sigma^2 - \sigma^2}{\sigma + \sigma + \sigma + \sigma} = \frac{2r - \sigma^2}{2\sigma}.$$

Grenzübergar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^d q^u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u - r_f)(r_f - d)}{(u - d)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{r}{n}})(e^{\frac{r}{n}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})}{(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})^2}$$

siehe (1), (3)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x\sigma} - e^{x^2 r})(e^{x^2 r} - e^{-x\sigma})}{(e^{x\sigma} - e^{-x\sigma})^2}$$

Substitution $\frac{1}{\sqrt{n}} = x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{2x^2 r} + e^{x^2 r + x\sigma} + e^{x^2 r - x\sigma} - 1}{e^{2x\sigma} + e^{-2x\sigma} - 2}$$

ausmult.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{2x^2 r} + e^{x^2 r + x\sigma} + e^{x^2 r - x\sigma} - 1}{e^{2x\sigma} + e^{-2x\sigma} - 2} && \text{ausmult.} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4xr e^{2x^2 r} + (2xr + \sigma)e^{x^2 r + x\sigma} + (2xr - \sigma)e^{x^2 r - x\sigma}}{2\sigma e^{2x\sigma} - 2\sigma e^{-2x\sigma}} && \text{l'Hospital (4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4r(e^{2x^2 r} + x \cdot e^{2x^2 r} \cdot 4rx) + 2r \cdot e^{x^2 r + x\sigma} + (2xr + \sigma)^2 \cdot e^{x^2 r + x\sigma} + 2r \cdot e^{x^2 r - x\sigma} + (2xr - \sigma)^2 \cdot e^{x^2 r - x\sigma}}{4\sigma^2(e^{2x\sigma} + e^{-2x\sigma})} && \text{wieder l'Hospital} \\
 &= \frac{-4r + 2r + \sigma^2 + 2r + \sigma^2}{8\sigma^2} = \frac{1}{4} && \text{Grenzwert}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassen,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\sigma\sqrt{n}(q^u - q^d)}{2\sigma\sqrt{Tq^d q^u}} &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\sigma\frac{2r - \sigma^2}{2\sigma}}{2\sigma\sqrt{T\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\end{aligned}$$

und das wollten wir letztendlich zeigen.