Derivate und ihre Bewertung

Preis eines Calls im Binomialmodell

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Freie Universität Berlin

Version vom 27. März 2026

Europäischer Call
Vereinfachung der Gleichung

C ist ein europäischer Call mit Laufzeit T und Ausübungspreis K.

Der Call kostet heute C_0 und liefert $\max(S_T - K, 0)$. Nach dem Fundamentalsatz gilt also

$$C_0 = \frac{\mathrm{E}_Q[C_T]}{(1 + r_f)^T}. \tag{1}$$

Wir wollen diese Gleichung jetzt sehr vereinfachen. Das geschieht in mehreren Schritten

1. Schritt: Struktur der Zahlung

Wir wissen, wann der Call ausgeübt wird. Also

$$C_0 = \frac{\mathrm{E}_Q[\max(S_T - K, 0)]}{(1 + r_f)^T}.$$

Wir bilden Erwartungswert. Betrachte jeden Zustand s mit zugehörigem Aktienkurs $S_T(s)$ und Wahrscheinlichkeit $p^Q(s)$. Es gab 2^T Zustände (Pfade!) s, also summieren:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^T} \sum_{s=1}^{2^T} q(s) \cdot \max(S_T(s) - K, 0).$$

Ein Zustand s ist Folge von insgesamt T Auf– und Abwärtsbewegungen. Beispielsweise

$$s = \underbrace{uud \dots d}_{T \text{ Mal}}.$$

Das Ergebnis S_T hängt aber nur von Anzahl der us und ds und nicht ihrer Reihenfolge ab (pfadunabhängig, bzw. Aktie rekombinierend).

Wir fassen die einzelnen Summanden mit der gleichen Anzahl von ds zusammen!

Beispiel: uud, udu, duu ergeben gleichen Aktienkurs S_3 und gleiche Wahrscheinlichkeit $(q^u)^2 q^d$ in Summe oben.

Es soll k Mal ein d im Zustand s vorkommen.

1. Für jedes s sind die einzelnen Summanden $q(s) \cdot \max(S_T(s) - K, 0)$ gleich groß.
2. Wie viel derartige Zustände gibt es?

Wir summieren jetzt über die Anzahl k der Abwärtsbewegungen und nicht die einzelnen Pfade s,

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^T} \sum_{s=1}^{2^T} q(s) \cdot \max(S_T(s) - K, 0) =$$

$$= \frac{1}{(1+r_f)^T} \sum_{k=0}^{T} ? \left(q^d\right)^k (q^u)^{T-k} \cdot \max\left(S_0(1+d)^k(1+u)^{T-k} - K, 0\right).$$

Wir haben T Plätze. Auf den Plätzen steht k Mal d und auf den anderen Plätzen muss u stehen. Wie oft geht das?

Kombinatorik: Wie viel Möglichkeiten der Auswahl von k Elementen (= einer Abwärtsbewegung) in einer Gesamtheit von T Objekten (= allen möglichen Bewegungen) gibt es?

Binomialkoeffizient

$$\binom{T}{k} = \frac{T!}{k!(T-k)!} \qquad = \frac{T \cdot (T-1) \cdot (T-2) \cdots (T-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2}.$$

(Anmerkung: ddd ergibt dasselbe wie ddd)

Wir erhalten für den Preis des europäischen Calls

$$C_0 = \frac{\sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} \left(q^d\right)^k \cdot \left(q^u\right)^{T-k} \max\left(S_0(1+d)^k(1+u)^{T-k} - K, 0\right)}{\left(1+r_f\right)^T}.$$

Je kleiner der Summationsindex k, desto größer der Aktienkurs $S_0(1+u)^{T-k}(1+d)^k$.

Es gibt Summationsindex k^*, so dass für alle Indizes $k > k^*$ Aktienkurs unter dem Ausübungspreis K. Für alle Indizes $k \leq k^*$ dagegen Aktienkurs über dem Ausübungspreis.

Wie groß ist k^*? Dazu umstellen

$$S_0(1+d)^{k^*}(1+u)^{T-k^*} - K = 0$$

nach k^*.

Ergibt

$$k^* = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0(1+u)^T}\right)}{\ln\left(\frac{1+d}{1+u}\right)}$$

oder

$$k^* = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\ln(1+u)}{\ln(1+d) - \ln(1+u)}.$$

Wir haben jetzt

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^T} \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} \left(q^d\right)^k \cdot (q^u)^{T-k} \left(S_0(1+d)^k(1+u)^{T-k} - K\right),$$

Letzten Faktor ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^T} S_0 \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} \left(q^d\right)^k \cdot (q^u)^{T-k} (1+d)^k(1+u)^{T-k} \\ - \frac{1}{(1+r_f)^T} K \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} \left(q^d\right)^k \cdot (q^u)^{T-k}. \end{aligned}$$

Zweiten Summanden vereinfachen

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^T} S_0 \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} \left(q^d\right)^k \cdot \left(q^u\right)^{T-k} (1+d)^k (1+u)^{T-k}$$

$$- \frac{1}{(1+r_f)^T} K \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} (q^d)^k \cdot (1-q^d)^{T-k}.$$

Q im ersten Summanden einsetzen und Faktoren mit gleichem Exponenten zusammenfassen

$$C_0 = S_0 \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} \left(\frac{u-r_f}{u-d} \frac{1+d}{1+r_f}\right)^k \cdot \left(\frac{r_f-d}{u-d} \frac{1+u}{1+r_f}\right)^{T-k}$$

$$- \frac{1}{(1+r_f)^T} K \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} (q^d)^k \cdot (1-q^d)^{T-k}.$$

Die ersten Faktoren sollen weiter vereinfacht werden. Wir definieren

$$\hat{q}^d := \frac{u - r_f}{u - d} \frac{1 + d}{1 + r_f}, \tag{2}$$

dann gilt der Zusammenhang

$$\hat{q}^u = 1 - \hat{q}^d = \frac{r_f - d}{u - d} \frac{1 + u}{1 + r_f}.$$

Das ergibt endlich

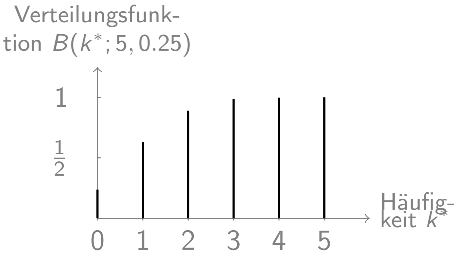
$$C_0 = S_0 \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} (\hat{q}^d)^k \cdot (1 - \hat{q}^d)^{T-k} \\ - \frac{1}{(1 + r_f)^T} K \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} (q^d)^k \cdot (1 - q^d)^{T-k}.$$

Zuletzt wollen wir diese Binomialverteilung in die Gleichung einsetzen (eher Variablen ersetzen)!

$$B(k^*; T, q) := \sum_{k=0}^{k^*} \binom{T}{k} q^k \cdot (1-q)^{T-k},$$

aus

Abbildung: Verteilungsfunktion einer Binomialverteilung.



Die Bewertungsgleichung des Calls lautet endlich

$$\boxed{C_0 = S_0 \cdot B(k^*; T, \hat{q}^d) - \frac{1}{(1+r_f)^T} K \cdot B(k^*; T, q^d).}$$