

Derivate und ihre Bewertung

Arbitragefreiheit

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)



Version vom 27. März 2026

Arbitragefreiheit
Fundamentalsatz
Wahrscheinlichkeit Q

Definition Der Markt ist *arbitragefrei* genau dann, wenn keine Handelsstrategie H existiert mit

$$\forall t \geq 0 \quad \Delta_t H \geq 0$$

und die Handelsstrategie von der null verschieden ist

$$\exists t \geq 0 \quad \Delta_t H \neq 0.$$

Das ähnelt der Definition aus dem Zwei-Zeitpunkte-Modell,

$$X_1 \geq 0, \quad -X_0 \geq 0$$

Satz. Für die Parameter u, d, r_f gelte der Zusammenhang

$$d < r_f < u.$$

Dann ist das Binomialmodell arbitragefrei.

Wir beweisen diesen Satz nicht. Er ist dennoch plausibel.

Satz. Es gibt eine *eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung* Q derart, so dass für jede Strategie H der Zusammenhang

$$\underbrace{-\Delta_0 H}_{\text{Zahlung in } t=0} = \underbrace{\sum_{t=1}^T \frac{E_Q[\Delta_t H]}{(1+r_f)^t}}_{\text{zukünftige Zahlungen in } t \geq 1}$$

gilt.

Damit ist der Preis einer Strategie bestimmt durch die zukünftigen Auszahlungen.

Wir schauen auf einen **beliebigen Knoten** im Binomialbaum. S_t sei der Aktienkurs. Eine Periode später wird daraus $(1 + u)S_t$ oder $(1 + d)S_t$.

Folgende Strategie: “Man borgt sich S_t , kauft die Aktie und zahlt eine Periode später den Kredit zurück”. Diese Strategie soll heute kostenlos sein, d.h. der Fundamentalsatz *soll* gelten.

Dann

$$0 = -S_t(1 + r_f) + E_Q[S_{t+1}]$$

oder

$$S_t = \frac{E_Q[S_{t+1}]}{1 + r_f}.$$

Nach Ausmultiplizieren

$$q^d(1+d)S_t + q^u(1+u)S_t = (1+r_f)S_t.$$

S_t kürzt sich. Da sich beide Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren ergibt das

$$\begin{aligned}q^d \cdot d + q^u \cdot u &= r_f, \\ q^d + q^u &= 1.\end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung

$$q^d = \frac{u - r_f}{u - d}, \quad q^u = \frac{r_f - d}{u - d}.$$

Tabelle: Begriffe beim 2×2 - und Binomialmodell.

2×2 -Modell	Binomialmodell
Zustand	Pfad
Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit
Arrow-Debreu-Titel	Aktie, Bond
Portfolio	Handelsstrategie
vollständiger Markt	
arbitragefreier Markt	
Fundamentalsatz	