Derivate und ihre Bewertung

Strategien und vollständige Märkte

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Freie Universität Berlin

Version vom 27. März 2026

Das Problem
Strategie
Vollständigkeit

Definitionsversuch *Das Binomialmodell heißt vollständig genau dann, wenn jedes Wertpapier mit irgendwelchen Zahlungen* $X_t(s)$ *in den Zuständen* s *und den Zeitpunkten* t *gehandelt werden kann.*

Aber was heißt "gehandelt" genau? Wir haben mehrere Zeitpunkte und verschiedene Informationsstände?

Man kann das Problem nicht dadurch lösen, indem man versucht hier Arrow-Debreu-Titel einzuführen.

Wir handeln

- in jedem Zeitpunkt
- basierend auf der Information, die wir dann haben.
- Und das geschieht alles gedanklich in $t = 0$ ("Stichtagsprinzip").

Das Ergebnis unserer Gedanken nennen wir eine Strategie.

Formale Beschreibung einer Strategie

In $t = 0$ halten wir Stocks (H_0^S) und Bonds (H_0^B).[1] Beide Größen sind Zahlen. Das Ergebnis ist ein Vektor,

$$H_0 = (H_0^S, H_0^B).$$

Wir halten bis $t = 1$.
Kurz nach $t = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten (u oder d).
Dementsprechend halten wir dann H_1^S Aktien (entweder $H_1^S(u)$ oder $H_1^S(d)$) und H_1^B Bonds (entweder $B_1(u)$ oder $H_1^B(d)$). Das Ergebnis ist jetzt ein Vektor zweier Vektoren

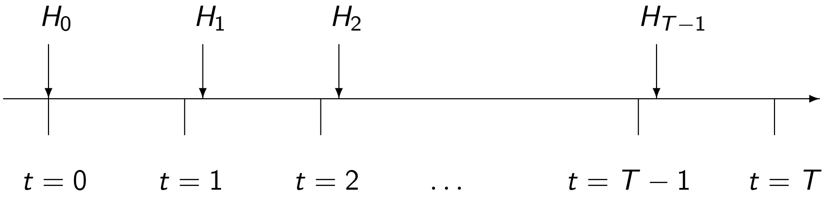
$$H_1 = (H_1^S, H_1^B).$$

Und so weiter.
Die (dynamische) Strategie ist $H = (H_0, H_1, \ldots, H_{T-1})$. In T wird alles verkauft.

---

[1] In der Aufzeichnung falsch: Dort stehen fälschlicherweise Preise (S_0, B_0) statt Mengen (H_0^S, H_0^B). Das gilt für die gesamte Folie.

Abbildung: Zeitstruktur des Modells.



Umschichtung

Das Portfolio wird in jedem Zeitpunkt umgeschichtet (komplett verkauft und neu gekauft). Das verursacht (Netto)Zahlungen in Höhe von

$$\Delta_t H := \begin{cases} , & t > 0 \\ -\left(H_0^B \cdot B_0 + H_0^S \cdot S_0\right), & t = 0 \end{cases} \begin{cases} \left(H_{t-1}^B \cdot B_t + H_{t-1}^S \cdot S_t\right) - \dots \\ -\left(H_0^B \cdot B_0 + H_0^S \cdot S_0\right), \end{cases}$$

Definition. *Ein Binomialmodell heißt vollständig genau dann, wenn für beliebige Zahlungen $X_t(s)$ in $\underline{t > 0}$ und Zuständen s eine Strategie H existiert, so dass*

$$X_t = \Delta_t H \qquad \forall t > 0.$$

Satz. *Unabhängig von der Wahl der Parameter* u *und* d, *dem risikolosen Zinssatz* r_f *und der Wahrscheinlichkeiten* p^d, p^u *gilt: Das Binomialmodell ist vollständig.*

Wir haben in jedem Knoten zwei Bewegungen. Wir haben zwei Wertpapiere.

Das passt.

Worin liegt die Schwierigkeit des Beweises?

Natürlich kann man in den ersten Zeitpunkten “irgendwie” handeln, so dass die geforderten Zahlungen entstehen. Aber es ist überhaupt nicht klar, dass die Rechnung am letzten Zeitpunkt so aufgeht, wie ursprünglich geplant!

Man muss vielmehr die Zahlungen vom letzten Zeitpunkt ausgehend planen. (Übungsaufgabe.)