Derivate und ihre Bewertung

Binomialmodell

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Version vom 27. März 2026

Mehrperiodenmodell
Aktie
Zustände = Pfade
Wahrscheinlichkeiten

Wir wollen die Aussagen der letzten Vorlesung auf mehrere Perioden erweitern. Welche Probleme treten dabei auf?

Wir haben mehrere Zeitpunkte $t = 1, 2, \ldots, T$.

Lassen Sie mich heuristisch vorgehen. Welche Begriffe waren bisher wichtig (z.B. “Arbitragefreiheit”)?

Tabelle: Begriffe beim 2×2- und Binomialmodell.

2×2-Modell	Binomialmodell
Zustand	Pfad
Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit
Arrow-Debreu-Titel	Aktie, Bond
Portfolio	Handelsstrategie
vollständiger Markt	
arbitragefreier Markt	
Fundamentalsatz	

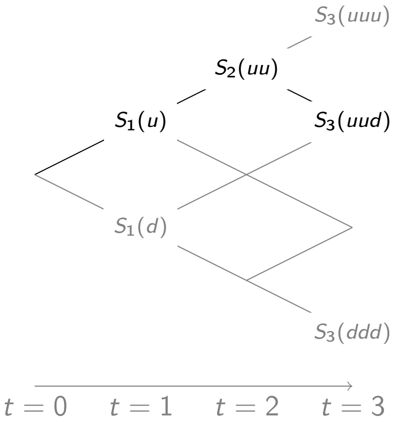
Wir nehmen an, dass es zwei Wertpapiere gibt: eine Aktie und einen Bond.

Der Bond verzinst sich zu r_f, also

$$B_t = (1 + r_f)B_{t-1}$$

Die Wertentwicklung der Aktie ist unsicher. Diese Unsicherheit soll so einfach wie möglich gestaltet werden.

Abbildung: Wertentwicklung der Aktie.



Formal bedeutet das

$$S_t = \begin{cases} (1+u) \cdot S_{t-1} & \text{bei Bewegung up,} \\ (1+d) \cdot S_{t-1} & \text{bei Bewegung down.} \end{cases}$$

u und d unabhängig von Zeit und Knoten. Beide größer als -100%, aber nicht unbedingt größer als null (außerdem $u > d$).

Aktienkurse können bei u fallen und bei d steigen: wir nehmen **nicht** an $u > 0$ oder $d < 0$.

Die Zustände ergeben sich aus den Aktienkursbewegungen!

Ein Zustand soll eine Bewegung beschreiben, wir sprechen genauer von einem Pfad. Im Bild oben wäre das *uud*.

Ein Pfad wird beschrieben durch T Buchstaben u oder d:

$$s = \underbrace{ud \cdots du}_{T \text{ mal}}$$

1. Es gibt bei T zukünftigen Zeitpunkten insgesamt 2^T Pfade.
2. Für die Aktie sind die Pfade in unserem Modell rekombinierend, also Aktienkurs $S(ud) = S(du)$.
3. Für andere Wertpapiere kann bei den Pfaden die Reihenfolge wichtig sein, d.h. *ud* ergibt dann eine andere Zahlung als *du* (man spricht von pfadabhängigen Titeln).

Wir haben in jedem Zeitpunkt eine Zahlung, also ist ein Wertpapier durch einen Vektor von Zahlungen beschrieben
$X = (X_1, X_2, \ldots, X_T)$.

X_T kann dabei (muss aber nicht) von dem Pfad abhängen, den der Aktienkurs bis T nahm.

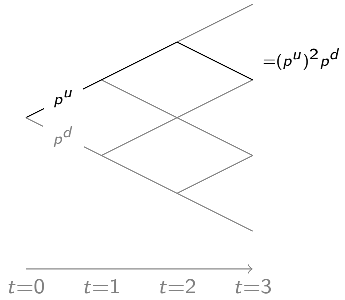
Unser Beispiel: Europäischer Call auf Aktie zum Basispreis K mit Ausübung in 3,

$$X_1(s) = 0, \quad X_2(s) = 0$$

und in dem Endzeitpunkt $t = 3$ nur dann, wenn Aktienpreis größer als K

$$X_3(s) = \max(S_3(s) - K, 0).$$

Abbildung: Wahrscheinlichkeiten der Zustände.



Wieder sind p^d und p^u unabhängig von Zeitpunkt und Knoten.
Zudem sind die Einzelwahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander.
Man muss dann multiplizieren, beispielsweise

$$p(s) = p(uud) = p^u \cdot p^u \cdot p^d.$$

Erwartungswert einer Zahlung

$$\mathrm{E}[X_t] = \sum_{s=1}^{S} X_t(s) \cdot p(s).$$

Für unseren europäischen Call C ergibt sich als Erwartungswert der Zahlungen

$$\mathrm{E}[C_1] = 0, \quad \mathrm{E}[C_2] = 0$$

und in dem Endzeitpunkt $t = 3$

$$\mathrm{E}[C_3] = \sum_{s=1}^{8} p(s) \max(S_3(s) - K, 0).$$