Derivate und ihre Bewertung

Fundamentalsätze (risikoneutrale Wahrscheinlichkeit)

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Version vom 27. März 2026

Wieso ist der Satz “fundamental”?

Philip Dybvig (links) und Steven Ross (rechts)

Das hat Philip Dybvig gern auf Konferenzen erzählt. . .

Satz. Markt vollständig und arbitragefrei. Dann gibt es Wahrscheinlichkeitsverteilung Q derart, dass für alle Titel X

$$\underbrace{X_0}_{\text{Preis von } X} = \frac{\mathrm{E}_Q[X_1]}{1 + r_f}$$

gilt.

Es sei

$$q^Q(s) := (1 + r_f)A_0^s. \tag{1}$$

Wegen Vollständigkeit wird Arrow-Debreu-Titel gehandelt.

Zwei Dinge zu zeigen:

- Sind das Wahrscheinlichkeiten, also die $q(s) \in (0, 1)$ und Summe gleich 100%?
- Gilt Aussage des Satzes?

Zuerst: Wahrscheinlichkeiten sind positiv.

Der Markt ist arbitragefrei, also muss der Preis eines Arrow–Debreu–Titels positiv sein,

$$A_0^s > 0.$$

Damit sind die $q^Q(s) > 0$.

Jetzt: Summe ist 100%.

Wir betrachten alle Arrow–Debreu–Titel und bilden Portfolio

$$\sum_{s=1}^{S} A^s.$$

Dieses Portfolio ist risikolos, oder

$$\sum_{s=1}^{S} A_1^s = \mathbf{1}_1$$

und wegen Linearität muss gelten

$$\sum_{s=1}^{S} A_0^s = \mathbf{1}_0 = \frac{1}{1+r_f}.$$

Daraus folgt nun

$$1 = \sum_{s=1}^{S} (1+r_f) A_0^s = \sum_{s=1}^{S} q^Q(s).$$

Zuletzt: Fundamentalsatz.

Sei X ein Wertpapier. Das lässt sich darstellen als

$$X_1 = \sum_{s=1}^{S} X_1(s) A_1^s.$$

Beispiel: Wir nehmen wieder $X = (3, 4, -2)$. Dort galt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \text{-2} \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{3}_{X_1(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{4}_{X_1(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(-2)}_{X_1(3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun zum Schluss

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \sum_{s=1}^{S} X_1(s) \cdot A_0^s && \text{Linearität} \\
&= \sum_{s=1}^{S} X_1(s) \cdot \frac{1}{1+r_f} \cdot (1+r_f) A_0^s && \text{erweitern} \\
&= \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} X_1(s) \cdot q^Q(s) && \text{Def. } Q \\
&= \frac{\mathrm{E}_Q[X_1]}{1+r_f} && \text{Def. Erwartungswert}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Satz. Markt vollständig und arbitragefrei. Dann ist risikoneutrale Wahrscheinlichkeit eindeutig bestimmt.

Wir wissen, dass für jede risikoneutrale Wahrscheinlichkeit

$$q^{Q^1}(s) := (1 + r_f)A_0^s$$

gilt. Sei Q^2 andere Wahrscheinlichkeit. Dann gilt Bewertungsgleichung auch für Q^2. Wir nehmen den Arrow-Debreu-Titel A^s und erhalten

$$A_0^s = \frac{\mathrm{E}_{Q^2}[A_1^s]}{1 + r_f} = \frac{q^{Q^2}(s)}{1 + r_f} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{(1 + r_f)A_0^s}_{=q^{Q^1}(s)} = q^{Q^2}(s)$$

und das war zu zeigen.

$$\begin{array}{rcl} \text{vollständig \& arbitragefrei} & \Longrightarrow & Q \text{ existiert und eindeutig} \\ \text{arbitragefrei} & \Longrightarrow & Q \text{ existiert (kann mehrdeutig sein)} \end{array}$$