

Derivate und ihre Bewertung

Arbitragefreiheit

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)



Version vom 27. März 2026

Beispiele
Definition
lineare Preise

1. Zwei Wertpapiere mit identischen Auszahlungen ($X_1 = Y_1$) und unterschiedlichen Preisen ($X_0 \neq Y_0$).
2. Ein Wertpapier, das in der Zukunft nichts zahlt ($X_1 = 0$) und einen positiven Preis ($X_0 \neq 0$) besitzt.
3. Ein Wertpapier, das heute nichts kostet ($X_0 = 0$) aber morgen einen sicheren Ertrag verspricht ($X_1 = 1$ oder "Geschenk morgen").
4. Aber auch ein Wertpapier, das heute nichts kostet und morgen nur manchmal einen Ertrag verspricht (also etwa $X_1(1) = 1$ und sonst $X_1(s) = 0$) ist eine Arbitrage (auch hier liegt ein "Geschenk morgen" vor).

Keine Arbitrage liegt vor, wenn beispielsweise der Preis heute null ist und morgen nur im Durchschnitt ein Ertrag erfolgt ($E[X_1] > 0$): Ertrag ist nicht sicher, es kann $X_1(s) < 0$ in einem Zustand sein.

Definition. Ein Markt ist **arbitragefrei** genau dann, wenn es kein Wertpapier (eine “Arbitrage”) mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$X_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad -X_0 \geq 0, \quad (1)$$

und zudem $X_1 \neq 0$ oder $X_0 \neq 0$ gilt.

arbitragefrei

Hier sei $X_1 \neq 0$ erfüllt.

Dann gelten drei Ungleichungen

$$X_1 \geq 0, -X_0 \geq 0, X_1 \neq 0.$$

Das Wertpapier liefert in $t = 1$ etwas, kostet aber heute nichts.

Achtung. Aus den Annahmen folgt nicht $X_1 > 0$ – ein Gegenbeispiel ist $X_1 = (1, 0)$.

Hier sei $X_0 \neq 0$ erfüllt.

Dann gelten zwei Ungleichungen

$$X_1 \geq 0, -X_0 > 0.$$

Das Wertpapier kostet in $t = 1$ nichts, liefert aber heute etwas.

Weil X_0 eine Zahl ist, folgt jetzt aus $-X_0 \geq 0$ und $X_0 \neq 0$ sehr wohl $-X_0 > 0$.

Satz In einem arbitragefreien Markt gilt für alle Zahlen a und b sowie Wertpapiere Z^1 und Z^2

$$\forall s \ Y_1(s) = a \cdot Z_1^1(s) + b \cdot Z_1^2(s) \implies Y_0 = a \cdot Z_0^1 + b \cdot Z_0^2. \quad (3)$$

(“keine Synergien”, “keine Mengenrabatte”)

Beweis: indirekt. Nehmen wir einmal an

$$Y_0 < a \cdot Z_0^1 + b \cdot Z_0^2.$$

Folgende Strategie X bildet Arbitrage

1. kaufe das billige Asset Y
2. verkaufe das teure Portfolio aus a Mal Z^1 und b Mal Z^2

damit

$$X = Y - (a \cdot Z^1 + b \cdot Z^2).$$

Für das X gilt dann nach Konstruktion

$$X_1 = Y_1 - (a \cdot Z_1^1 + b \cdot Z_1^2) = 0$$

und damit $X_1 \geq 0$ wie in der Definition für Arbitragen gefordert.
Zudem gilt

$$-X_0 = -Y_0 + (a \cdot Z_0^1 + b \cdot Z_0^2) > 0$$

nach Voraussetzung. Damit ist das Arbitrage (das war Fall 2).

Wir betrachten einen Markt, an dem Wertpapiere mit Zahlungen in zwei Zuständen gehandelt werden

$$Y_1 = (Y_1(1), Y_1(2)).$$

Für die Preise wird uns eine "Preisfunktion" präsentiert.

Wir nehmen an, die Preise eines Wertpapiers errechnen sich nach folgender Beziehung

$$Y_0 := -Y_1(1) + Y_1(2).$$

Sehen Sie die Arbitrage (können Sie das X aus der Definition konstruieren)?

Eine Möglichkeit:

$$X_1 = (1, 0) \quad \implies \quad X_1 \geq 0, X_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad -X_0 = 1 \not\leq 0$$

und das ist eine Arbitrage.

Wir nehmen an, die Preise eines Wertpapiers errechnen sich nach folgender Beziehung

$$Y_0 = \sqrt[3]{Y_1(1)^2 + Y_1(2)}$$

Eine doppelte Menge des ersten Arrow–Debreu–Titels kostet weniger als doppelt soviel (nur 1.587 Mal soviel). Das ist wie ein **Mengenrabatt**.

Sehen Sie den Widerspruch oder sogar die Arbitrage?

Eine Möglichkeit:

$$\begin{aligned} X_1 = (1, 0), Y_1 = (2, 0) &\implies 2 \cdot X_1 = Y_1 \quad \text{und} \quad X_0 = 1 \\ &\implies Y_0 = 1.5874 \neq 2 \cdot X_0 \end{aligned}$$

und das verletzt Linearität.

Die Preise dürfen nur **linear** von $X_1(1)$ und $X_1(2)$ abhängen und die Koeffizienten müssen **positiv** sein!

Das ist die Intuition des ersten Fundamentalsatzes.