Derivate und ihre Bewertung

Vollständige Märkte

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Freie Universität Berlin

Version vom 27. März 2026

Theorie mit mehreren Zustände

- Das Grundmodell
- Arrow–Debreu–Titel

Es gibt zwei Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$. Die Zukunft ist unsicher: es gibt mehrere Zustände $s = 1, \ldots, S$, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten $q(s)$ bekannt sind.

Portfolios

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_1(2) \\ \vdots \\ X_1(S) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Menge an Zahlung im ersten Zustand} \\ \longleftarrow & \text{Menge an Zahlung im zweiten Zustand} \\ & \vdots \\ \longleftarrow & \text{Menge an Zahlung im } S\text{–ten Zustand} \end{array}$$

Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeiten erfüllen zwei Bedingungen

1. Jeder Zustand könnte unter Umständen eintreten, also $q(s) > 0$ und
2. es wurde auch kein Zustand “vergessen” oder doppelt erfasst, also $\sum_{s=1}^{S} q(s) = 1$.

Der Erwartungswert der Zahlung von X_1 unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Investors ist

$$\mathrm{E}[X_1] = \sum_{s=1}^{S} q(s) \cdot X_1(s).$$

Der Preis des Titel X ist derjenige Geldbetrag, den man im Zeitpunkt 0 zahlen muss, X_0.

Risikoloser Titel ist $\mathbf{1}_1 = (1, \ldots, 1)$ und

$$1_0 = \frac{1}{1 + r_f}.$$

Wir wollen die Zahlung eines Wertpapiers durch andere Titel "nachbauen". Wie viel Titel benötigt man?

Definition: Ein Markt ist vollständig, wenn jedes Wertpapier mit irgendwelchen Zahlungen $X_1(s)$ in den Zuständen s gehandelt wird.

Wir betrachten Wertpapiere, die Wetten auf genau einen Zustand s sind.

Wir bezeichnen mit A^s denjenigen Arrow–Debreu–Titel, welcher im Zustand s gerade 1 Geldeinheit und sonst nichts auszahlt.

Beispiel. Drei mögliche Zustände. Ein Wertpapier, das im ersten Zustand 3 Geldeinheiten, im zweiten Zustand 4 Geldeinheiten und im letzten Zustand –2 Geldeinheiten auszahlt.
Dieses Wertpapier kann mit Hilfe eines Portfolios aus den drei Arrow–Debreu–Titeln wie folgt konstruiert werden

$$X = 3A^1 + 4A^2 - 2A^3.$$

Ein Kauf von -1 Wertpapier ist ein Leerverkauf.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=X} = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=A^1} + 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=A^2} + (-2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=A^3}$$

Satz. Ein Markt ist genau dann vollständig, wenn zu jedem Zustand s der Arrow–Debreu–Titel A^s gehandelt wird.

Folgt unmittelbar aus dem Beispiel.

Satz. Ein Markt werde aus einer Menge von Wertpapieren $X^1, X^2, \ldots, X^n$ und den daraus möglichen Portfolios gebildet. Wenn die Bedingungen

- $n = S$
- die Determinante der Matrix der Wertpapierzahlungen in $t = 1$ ist von null verschieden

erfüllt sind, dann ist der Markt vollständig.

Wertpapiere $X^1, X^2, \ldots, X^S$ und Matrix der Zahlungen in $t = 1$

$$\begin{pmatrix} X_1^1(1) & X_1^2(1) & \ldots & X_1^S(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^1(S) & X_1^2(S) & \ldots & X_1^S(S) \end{pmatrix}$$

Damit Markt vollständig, muss A^1 aus diesen Wertpapieren gebildet werden. Das führt auf ein Gleichungssystem:

Wir nehmen a^1 vom Titel X^1, a^2 vom Titel X^2 usw.

$$
\begin{aligned}
(A_1^1(1) =)\ 1 &= a^1 X_1^1(1) + a^2 X_1^2(1) + \cdots + a^S X_1^S(1) \\
(A_1^1(2) =)\ 0 &= a^1 X_1^1(2) + a^2 X_1^2(2) + \cdots + a^S X_1^S(2) \\
&\vdots \\
\underbrace{(A_1^1(S) =)\ 0}_{=A^1} &= a^1 X_1^1(S) + a^2 X_1^2(S) + \cdots + a^S X_1^S(S)
\end{aligned}
$$

Gleichungssystem lösbar genau dann, wenn Determinante Matrix rechts ungleich null. Eben das war vorausgesetzt, q.e.d.

Jetzt erkennen wir, weshalb in unserem Beispiel mit drei Zuständen und einer Aktie sowie einem Bond eine Bewertung des Calls nicht möglich war: Dieser Markt ist nicht vollständig.

Bei drei Zuständen benötigen wir mindestens drei Wertpapiere.