Derivate und ihre Bewertung

Erster Blick auf Optionen

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)

Freie Universität Berlin

Version vom 27. März 2026

Erster Blick auf Optionen

- Einfaches Modell
- Idee des Nachbaus
- Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein einfaches Modell: zwei Zeitpunkte und in der Zukunft nur zwei Zustände.

Die Aktie S kostet heute S_0 und zahlt morgen je nach Zustand $S_1(1)$ oder $S_1(2)$.
Der Call C mit Basispreis K kostet heute C_0 und zahlt morgen je nach Zustand $C_1(s) = \max(S_1(s) - K, 0)$.
Der Bond B kostet heute B_0 und zahlt morgen immer B_1.

Damit das Modell sinnvoll ist, muss gelten

$$S_1(1) < K < S_1(2), \qquad \text{und} \qquad \frac{S_1(1)}{S_0} < \frac{B_1}{B_0} < \frac{S_1(2)}{S_0}.$$

Sonst würde der Call immer oder nie ausgeübt bzw. würde man nur oder nie in die Aktie und nicht den Bond investieren.

Um den Call aus einem Portfolio aus Aktie und Bond nachzubauen, wählen wir heute n_S Mengen Aktie und n_B Mengen Bond. In den beiden Zuständen muss dann gelten

$$\begin{aligned}
\text{Zustand 1} \quad &\Longrightarrow \quad \underbrace{n_s \cdot S_1(1) + n_B \cdot B_1}_{\text{Portfolio}} = \underbrace{0}_{\text{Call}} \\
\text{Zustand 2} \quad &\Longrightarrow \quad \underbrace{n_s \cdot S_1(2) + n_B \cdot B_1}_{\text{Portfolio}} = \underbrace{S_1(2) - K}_{\text{Call}}
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, weil die Determinante ungleich null ist.

Wir erhalten als Portfolio

$$n_S = \frac{S_1(2) - K}{S_1(2) - S_1(1)}$$
$$n_B = -\frac{S_1(1)}{B_1} \cdot \frac{S_1(2) - K}{S_1(2) - S_1(1)} < 0$$

$n_B < 0$ heißt: Der Investor nimmt Kredit auf, um die Aktie zu kaufen.

Wenn die Zahlungen in $t = 1$ identisch sind, müssen die Preise heute übereinstimmen:

$$C_0 = n_S S_0 + n_B B_0 = \ldots = \underbrace{\frac{B_0}{B_1}}_{=\frac{1}{1+r_f}} \cdot (S_1(2) - K) \cdot \frac{S_0 B_1 - S_1(1) B_0}{(S_1(2) - S_1(1)) B_0} .$$

Der Preis des Calls ist durch $\tilde{S}$, B und K festgelegt.

Wir stellen zuerst fest, dass der Preis des Calls (scheinbar) unabhängig von den (subjektiven) Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände ist.

Wir gehen hier noch einen Schritt weiter und schlagen dem Investor vor, andere Wahrscheinlichkeiten zu analysieren:

$$q(2) = \frac{S_0 B_1 - S_1(1) B_0}{(S_1(2) - S_1(1)) B_0}, \qquad q(1) = 1 - q(2)\,.$$

Aber sind das überhaupt Wahrscheinlichkeiten? Dazu

$$\begin{aligned} & q(2) > 0 \\ \iff\quad & \frac{S_0 B_1 - S_1(1) B_0}{(S_1(2) - S_1(1)) B_0} > 0 \\ \iff\quad & S_0 B_1 > S_1(1) B_0 \\ \iff\quad & \frac{B_1}{B_0} > \frac{S_1(1)}{S_0} \end{aligned}$$

Analog zeigen wir $q(2) < 1$.

Analog zeigen wir $q(2) < 1$.

$$\begin{aligned}
& q(2) < 1 \\
\iff \quad & \frac{S_0 B_1 - S_1(1) B_0}{(S_1(2) - S_1(1)) B_0} < 1 \\
\iff \quad & S_0 B_1 - S_1(1) B_0 < (S_1(2) - S_1(1)) B_0 \\
\iff \quad & \frac{B_1}{B_0} < \frac{S_1(2)}{S_0}
\end{aligned}$$

Nun gilt aber, wenn das (zufällig) die subjektiven Wahrscheinlichkeiten des Investors wären

$$\frac{\mathrm{E}_Q[C_1]}{1 + r_f} = \frac{1}{1 + r_f} \left(q(1) 0 + q(2)(S_1(2) - K) \right)$$

In unserem Modell ist der Preis des Calls als diskontierter Q–Erwartungswert ermittelbar.

Eine Anmerkung

Noch einmal zur (Un)Abhängigkeit von den subjektiven Wahrscheinlichkeiten:

Für die Kapitalkosten (die Renditen unter den “richtigen” Wahrscheinlichkeiten) gilt

$$S_0 = \frac{\mathrm{E}[S]}{1+r}$$

also umgestellt

$$S_0 = \frac{S_1(1)p(1) + S_1(2)p(2)}{1+r}$$

und damit

- Wenn r konstant, dann hängt S_0 sehr wohl von den subjektiven Wahrscheinlichkeiten ab!
- …und damit sollte sich auch q verändern, wenn sich p verändert.

Q heißt

- risikoneutrale Wahrscheinlichkeit
- Martingalmaß
- Pseudowahrscheinlichkeit

Erwartete Rendite für den Call wird

$$\frac{\mathrm{E}_Q[C_1]}{C_0} - 1 = r_f,$$

und mit den Wahrscheinlichkeiten Q wäre unser Investor risikoneutral.

Jetzt soll der Call wie oben aus Aktie und Bond nachgebaut werden:

$$\text{Zustand 1} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{n_s \cdot S_1(1) + n_B \cdot B_1}_{\text{Portfolio}} = \underbrace{0}_{\text{Call}}$$

$$\text{Zustand 2} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{n_s \cdot S_1(2) + n_B \cdot B_1}_{\text{Portfolio}} = \underbrace{S_1(2) - K}_{\text{Call}}$$

$$\text{Zustand 3} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{n_s \cdot S_1(3) + n_B \cdot B_1}_{\text{Portfolio}} = \underbrace{S_1(3) - K}_{\text{Call}}$$

Nur durch puren Zufall hätte diese Gleichung eine Lösung.

$\Longrightarrow$ Call kann nicht nachgebaut werden.

$\Longrightarrow$ Callpreis ist nicht aus S_0, B_0 ermittelbar.