

Derivate und ihre Bewertung

Noch einmal Forwards und Futures

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)



Version vom 27. März 2026

Noch einmal: Forwards und Futures

Zinsstrukturkurve

Preis Forward

Preis Future

In Zukunft gebe es T Zeitpunkte. Wir betrachten nur festverzinsliche Wertpapiere ("bonds"), die Zahlungen in diesen Zeitpunkten versprechen.

Ein festverzinsliches Wertpapier verspricht eine Zahlung von genau einer Geldeinheit in einem Zeitpunkt t ("Zerobond"). Der Zerobond kostet heute $Z_0(t)$.

Der einjährige Zinssatz für eine Geldanlage vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t wird mit $r_{0,t}$ bezeichnet ("yield"). Für den Preis des Zerobonds gilt dann

$$Z_0(t) = \frac{1}{(1 + r_{0,t})^t}.$$

Durch die Angabe der Kassazinssätze $r_{0,t}$ ("Zinsstrukturkurve") oder die Angabe der Preise für Zerobonds ist der **Kassamarkt vollständig beschrieben**.

Die **Zinsstrukturkurve** ist die Abbildung aller Kassazinssätze $r_{0,t}$.

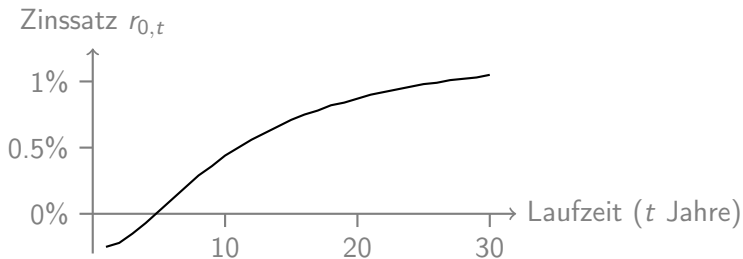


Abbildung: Zinsstrukturkurve (hier: Mai 2015)

Wachsende Verläufe sind üblich. Fallende Verläufe bezeichnet man als "invers", sie sind nur von relativ kurzer Dauer. Strukturkurven mit Buckeln ("humped") tauchen sehr häufig auf.

Satz (Termin- und Kassazinssätze) Der heute vereinbarte Forwardzins $r_{t,t+1}$ auf eine Geldanlage von t bis $t + 1$ ergibt sich aus den heutigen Kassazinssätzen $r_{0,t}$ und $r_{0,t+1}$ wie folgt

$$\frac{1}{1 + r_{t,t+1}} = \frac{(1 + r_{0,t})^t}{(1 + r_{0,t+1})^{t+1}}.$$

Beweisidee: Wir vergleichen den Forward mit zwei Kassageschäften,

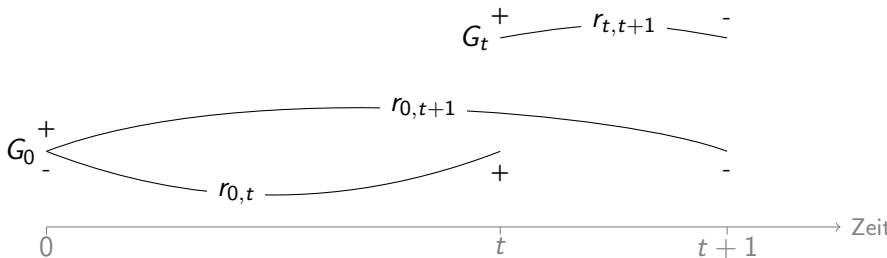
- ▶ wir legen heute den Geldbetrag G_0 bis t an und
- ▶ wir borgen heute den (identischen) Geldbetrag G_0 bis $t + 1$.

Damit haben wir bei diesen Kassageschäften (wie auch beim Forward) keine Zahlungen von 0 bis $t - 1$.

Abbildung: Zwei Kassageschäfte ergeben das Forwardgeschäft.

+ steht für Zahlungen, die der Investorin zufließen;

– steht für Zahlungen, die die Investorin aufzubringen hat.



Im Zeitpunkt t erhalten wir die Auszahlung aus der Geldanlage $(1 + r_{0,t})^t G_0$. Einen Zeitpunkt später zahlen wir den Kredit $(1 + r_{0,t+1})^{t+1} G_0$ zurück.

Dieses Geschäft hat Ähnlichkeiten mit einem Forward auf eine Geldanlage von t nach $t + 1$: auch dort erhalten wir in t Geld G_t und zahlen es eine Periode später mit Zins zurück.

⇒ Wenn beide Geschäfte die gleichen Zahlungen in $t + 1$ liefern, müssen sie auch den gleichen Preis in t haben (Arbitragefreiheit!)

⇒ Wenn also $G_t(1 + r_{t,t+1}) = (1 + r_{0,t+1})^{t+1} G_0$, dann auch $G_t = (1 + r_{0,t})^t G_0$.

⇒ Das ist die Behauptung.

Satz (Forwards und Futures) *Sind die Kassazinssätze nicht stochastisch (d.h. bereits im Zeitpunkt $t = 0$ bekannt), dann stimmen Forward und Future Preise überein.*

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Zinsstruktur flach ist: $r_{t,t+1} = r_f$. Das Gut ist in T gerade \tilde{S}_T wert.

Der Forward wird heute abgeschlossen, der Preis bei Lieferung ist FO_0 . Auch der Future wird heute abgeschlossen, es wird der Preis F_0 vereinbart. Wir haben zu zeigen $FO_0 = F_0$ und führen den Beweis indirekt: also gelte

$$FO_0 > F_0.$$

Jetzt konstruieren wir eine Arbitrage: der Investor würde hier unendlich reich werden. Das beweist die Behauptung.

Der Investor bildet dazu ein sich in der Zeit veränderndes Portfolio aus einem forward short (“verkaufe Gut zu FO_0 ”) und mehreren futures long (“kaufe Gut zu F_0 ” bzw. “kaufe zu F_t ”). Dabei hält er insgesamt

in 0 genau $(1 + r_f)^{-(T-1)}$ Einheiten des future long
in 1 genau $(1 + r_f)^{-(T-2)}$ Einheiten des future long
⋮
in $T - 1$ genau $(1 + r_f)^0$ (=eine) Einheit des future long.

Der Futurepreis entwickelt sich in der Zeit: in $t = 1$ ist er F_1 , in $t = 2$ ist er F_2 usw.

Analysieren wir die Zahlungsströme bei diesem Portfolio. Der Forward löst bis $T - 1$ keine Zahlungen aus. Der Future dagegen löst Marginzahlungen aus (Investor ist Käufer). Diese Margins borgt sich unsere Investorin. Sie macht also Schulden in folgender Höhe

$$\text{in 1 genau } (1 + r_f)^{-(T-1)} \cdot (F_0 - \tilde{F}_1)$$

$$\text{in 2 genau } (1 + r_f)^{-(T-2)} \cdot (\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)$$

$$\vdots$$

$$\text{in } T \text{ genau } (1 + r_f)^0 \cdot (\tilde{F}_{T-1} - \tilde{F}_T)$$

Am Ende der Laufzeit muss die Investorin alle Schulden zurück zahlen. Das ergibt Zahlungsverpflichtung in Höhe von

$$\begin{aligned}
 & (1 + r_f)^{-(T-1)}(F_0 - \widetilde{F}_1) \cdot (1 + r_f)^{T-1} + \\
 & \quad + (1 + r_f)^{-(T-2)}(\widetilde{F}_1 - \widetilde{F}_2) \cdot (1 + r_f)^{T-2} + \dots \\
 & \quad \dots + (1 + r_f)^0(\widetilde{F}_{T-1} - \widetilde{F}_T) \cdot (1 + r_f)^0 \\
 & = (F_0 - \widetilde{F}_1) + (\widetilde{F}_1 - \widetilde{F}_2) + \dots + (\widetilde{F}_{T-1} - \widetilde{F}_T) \\
 & = F_0 - \widetilde{S}_T.
 \end{aligned}$$

Unsere Investorin liefert außerdem das Gut zu FO_0 . Da sie es am Markt kauft, realisiert sie einen Erlös von $FO_0 - \widetilde{S}_T$. Damit verbleibt insgesamt

$$\underbrace{(FO_0 - \widetilde{S}_T)}_{\text{Erlös Forward}} - \underbrace{(F_0 - \widetilde{S}_T)}_{\text{Tilgung Schulden}} = FO_0 - F_0 > 0.$$

Sie hat bis $T - 1$ nichts gezahlt und erhält jetzt positiven Betrag. So wird man unendlich reich – Widerspruch.